



## Construcción de Aplicaciones Estables de 3-variedades en $\mathbb{R}^3$ \*

N. B. Huamaní and Catarina M. de J. Sánchez

ABSTRACT: This paper presents some graphs with weights, associated with the maps of 3-varieties in  $\mathbb{R}^3$ , and a scheme using these graphs for the construction of these stable applications of  $S^3$ ,  $S^1 \times S^2$  and the related sum between them in  $\mathbb{R}^3$ , with a predetermined singular set, making use of surgeries between maps. In addition to studying the relationship between graphs and stable maps.

Key Words: Stable maps, singular set, graphs with weights, 3-manifolds, 3-sphere.

### Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Aplicaciones estables de 3-variedades en <math>\mathbb{R}^3</math></b>     | <b>2</b>  |
| 2.1      | Grafos de aplicaciones estables de 3-variedades en $\mathbb{R}^3$ . . . . .   | 3         |
| <b>3</b> | <b>Cirugía entre aplicaciones estables con <math>\mathcal{G}</math>-grafo</b> | <b>4</b>  |
| <b>4</b> | <b>Grafos bipartitos pesados</b>  | <b>8</b>  |
| 4.1      | Cirugías. . . . .   | 8         |
| <b>5</b> | <b>Construcción de aplicaciones estables</b>                                  | <b>12</b> |
| <b>6</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>14</b> |

### 1. Introducción

El uso de grafos con pesos para el estudio de aplicaciones estables entre variedades es una herramienta usada por varios matemáticos [3], [4], [9], [11], [6]. Mendes de Jesus, Shina y Romero-Fuster en [9] introdujeron grafos con pesos en vértices y aristas asociados a aplicaciones estables de 3-variedades cerradas y orientadas en  $\mathbb{R}^3$ , como invariantes topológicos globales. Y Shina y Romero-Fuster en [11] introdujeron las cirugías entre aplicaciones estables de 3-variedades en  $\mathbb{R}^3$  las cuales inducen cirugías (operaciones) entre grafos asociados a estas aplicaciones estables. Al tener en cuenta estas cirugías en grafos con pesos, es posible estudiar estos grafos y obtener resultados, las cuales son usadas para el estudio de las aplicaciones estables, en ese sentido describimos el contenido de este trabajo de la siguiente forma:

En la Sección 2 presentamos, de forma resumida, la definición, ejemplos y resultados de estos grafos para aplicaciones estables de las 3-variedades  $S^3$  y  $S^1 \times S^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . El objetivo es dar a conocer la construcción de estas aplicaciones asociados a un grafo bipartito con pesos no negativos en los vértices y aristas haciendo un paralelo a las construcciones de aplicaciones estables entre superficies, introducidas por Hacon-Mendes-Romero en [4,3], usado para esto las cirugías entre aplicaciones estables que se presentan en la Sección 3, además de ver los efectos de estas cirugías en los grafos asociados con varios ejemplos. En la Sección 4 estudiamos el conjunto de los grafos bipartitos e introducimos las cirugías en este tipo de grafos inducidas por las cirugías en aplicaciones, para construir grafos a partir de otros grafos. En la Sección 5 se prueban resultados que tienen que ver con la construcción de aplicaciones estables con ciertas condiciones prefijadas entre otros resultados principales.

Cabe indicar que en [11,5,6] los autores estudiaron y presentaron otras técnicas para construir aplicaciones estables, usando las transiciones de codimensión 1, presentadas en [8,1].

\* The project is partially supported by Fondecyt C. 323-2019, CAPES and FAPEMIG (APQ-00715-14)

2010 *Mathematics Subject Classification*: 58K15, 57R45, 57M15, 57R65.

Submitted March 10, 2020. Published August 30, 2020

## 2. Aplicaciones estables de 3-variedades en $\mathbb{R}^3$

Sea  $M$  una 3-variedad y  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  el conjunto de aplicaciones suaves de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Dos aplicaciones  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  son  $\mathcal{A}$ -*equivalentes*, cuando existen dos difeomorfismos  $\phi : M \rightarrow M$  y  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Una aplicación  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  es *estable*, si todas las aplicaciones suficientemente próximas a  $f$  (en la  $C^\infty$ -topología de Whitney) es equivalente a  $f$ . Según J. Mather [7], el conjunto de todas las aplicaciones estables, denotado por  $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ , es abierto y denso en  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ . El complemento del conjunto  $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3) \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  es llamado *conjunto discriminante* y será denotado por  $\Delta = C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ .

Sea  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ , una aplicación genérica. El conjunto singular de  $f$  tiene dimensión dos y está formado por subvariedades de dimensiones cero, uno y dos, ver [10,1]. Ahora si  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ , es una aplicación estable, un punto  $x$  en  $M$  es llamado *punto regular* de  $f$  si la aplicación  $f$  es un difeomorfismo local en la vecindad del punto  $x$ , caso contrario diremos que  $x$  es llamado de *punto singular*. En [2] tenemos que la forma normal de los germenos de los puntos singulares de  $f$  son:

- a)  $A_1$ : *punto pliegue*,  $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$ ;
- b)  $A_2$ : *punto cúspide*,  $(x, y, z) \mapsto (x^3 + yx, y, z)$ ;
- c)  $A_3$ : *punto cola de golondrina*,  $(x, y, z) \mapsto (x^4 + yx^2 + zx, y, z)$ .

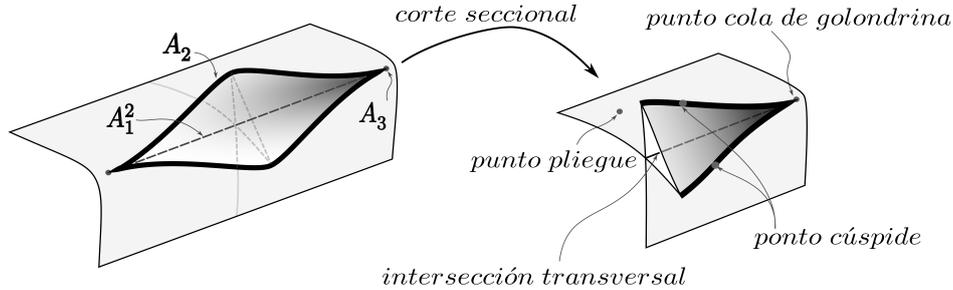
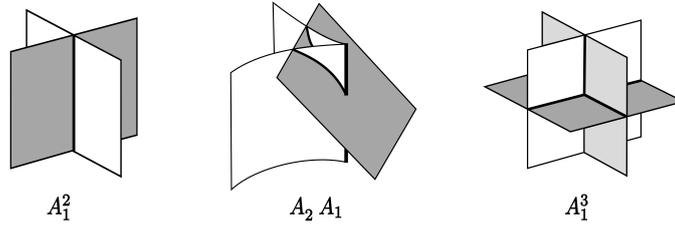


Figure 1: Ejemplos de puntos de curva cuspidal y cola de golondrina.

Si  $M$  es una 3-variedad compacta y orientada y el *conjunto singular* de  $f$ , denotado por  $\Sigma f$ , está formado por los siguientes: (i) la unión disjunta de superficies compactas, orientadas, inmersas en  $M$ . (ii) curvas formadas de puntos de cúspide, en la cual puede haber punto de cola de golondrina aislados si existen; y (iii) puntos pliegue.

Las superficies en (i) separan las componentes regulares de  $f$  y en cuyos bordes está contenido  $\Sigma f$ . El *conjunto de ramificación* de  $f$  es la imagen  $f(\Sigma f)$  del conjunto singular y está formado por una colección de superficies cerradas, orientadas y inmersas en  $\mathbb{R}^3$  posiblemente con intersecciones transversales y singularidades correspondientes a una cantidad finita de aristas cuspidales y puntos de cola de golondrina aislados (ver Figura 1). El conjunto de ramificación de  $f$  tiene las siguientes auto intersecciones (ver Figura 2):

1.  $A_1^2$ : intersección transversal de dos superficies de pliegue;
2.  $A_2A_1$ : intersección transversal de arista cuspidal con una superficie de pliegue;
3.  $A_1^3$ : puntos triples aislados, obtenidos por la intersección de superficies de pliegue.


 Figure 2: Puntos del tipo  $A_1^2$ ,  $A_2 A_1$  y  $A_1^3$ .

Tomando  $S_i \subset \Sigma f$  una superficie singular, cuya imagen  $f(S_i)$  es una superficie conexa y compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . Asociaremos a esta superficie  $f(S_i)$  una de dos direcciones: la dirección a la región interior de la superficie o a la región exterior de la misma, esto dependerá de, en que región están las imágenes de los puntos regulares que están en una vecindad tubular  $\mathcal{W}_i$  de  $S_i$  en  $M$  con  $\mathcal{W}_i \cap f = S_i$ , esta dirección será representada por un segmento perpendicular a dirección de la superficie  $f(S_i)$ , que podemos ver mas claramente en sus curvas de corte, bajo las imágenes del conjunto de ramificación.

Cabe indicar también que los conjuntos de ramificación formadas por superficies que presentaremos en las figuras siguientes, tienen un corte seccional las cuales son para visualizar mejor estas superficies (para ver si hay otra dentro o no).

Por ejemplo considerando la proyección trivial  $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ver aplicación  $i_0$  de la Figura 6), donde  $\Sigma\pi = S^2$  y su imagen  $\pi(\Sigma\pi) = \pi(S^2)$ , es también una esfera en  $\mathbb{R}^3$ , así las imágenes de los puntos regulares están al interior de la  $S^2$ . Además podemos ver un corte en la esfera que es imagen del conjunto singular para ver si habría mas superficies por dentro, como en el conjunto de ramificación de la aplicación  $f_1$  de la Figura 4, donde se tiene tres esferas una dentro de otra, y los cortes seccionales ayudan a ver ese hecho. Para mas ejemplos ver Figuras y 5.

### 2.1. Grafos de aplicaciones estables de 3-variedades en $\mathbb{R}^3$

Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación estable, donde  $M$  es una 3-variedad cerrada y orientada. Como el conjunto singular de  $f$  es un conjunto de superficies cerradas, los autores definieron en [11] el grafo pesado asociado a la aplicación  $f$  de la siguiente forma: a cada superficie  $S_i$  en  $\Sigma f$  asociaron una arista y a cada componente regular  $M_j$  de  $M \setminus \Sigma f$  un vértice. A cada vértice  $v_j$  (correspondiente a la región  $M_j$ ), se define su peso como  $c_j = b_2(M_j) - s_j + 1$ , donde  $s_j$  es el número de componentes conexas del borde de  $M_j$ . Intuitivamente,  $c_j$  puede ser visto como el número de generadores del segundo grupo de homología  $H_2(M)$  en  $M_j$ , que no son determinados por el borde de  $M_j$ . A cada arista, asociamos el peso dado por el género  $g_i$  de la superficie  $S_i$  que el representa. Como cada región del complemento  $M - \Sigma f$  recibe un signo  $\pm$ , pueden ser atribuidos signos a los vértices de  $\mathcal{G}_f$ , donde cada vértice recibe el signo y la región correspondiente. Como  $\Sigma f$  separa regiones de signos opuestos, cada arista de  $\mathcal{G}_f$  conecta vértices de signos opuestos. Así, el grafo asociado es *bipartito*.

**Definición 2.1.** El grafo asociado a la aplicación estable será denotado por  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  donde:  $V$ ,  $E$  son el número de vértices, aristas,  $W_v$  y  $W_e$  son la suma de pesos en los vértices y suma de pesos en las arista respectivamente.

Diremos que un grafo bipartito pesado  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  es *realizable por una aplicación estable* de una 3-variedad compacta y orientada  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ , si existe una aplicación  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  tal que el grafo asociado a  $f$  es  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$ . Además  $M$  será llamado *la variedad de  $\mathcal{G}$*  y será denotado por  $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = M$ .

Notemos que el primer número de Betti de  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  está denotado por  $b_1(\mathcal{G})$  y dado por  $b_1(\mathcal{G}) = 1 - V + E$ .

Si denotamos por  $\mathcal{M}_n$  a la suma conexa de  $n$  copias de  $S^1 \times S^2$ , con  $\mathcal{M}_0 = S^3$  por convención, entonces en [11] se probó el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.** [11] *Dado cualquier grafo bipartito  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$ . Entonces  $\mathcal{G}$  es realizable por una aplicación  $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  si y solo si*

$$W_v + 1 - V + E \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq W_v + W_e + 1 - V + E,$$

donde la igualdad se alcanza cuando  $W_e = 0$ .  $b_2(\mathcal{M}_n)$  es el segundo número de Betti de  $\mathcal{M}_n$ .

En la Figura 3 presentamos dos ejemplos del conjunto de ramificación de las aplicaciones estables  $f_1$  y  $f_2$  de  $S^3$  en  $\mathbb{R}^3$  y dos ejemplos de aplicaciones estables  $g_1$  y  $g_2$  de  $S^1 \times S^2$  en  $\mathbb{R}^3$  con sus respectivos grafos asociados. Donde  $f_1$  corresponde a una aplicación con un conjunto de ramificación homeomorfa a tres esferas formada solo por puntos de pliegue, así su grafo asociado tiene tres aristas con todos los pesos igual a cero en aristas y vértices. En  $f_2$  tenemos una aplicación con un conjunto de ramificación homeomorfa a tres esferas, dos de ellas con una curva cúspidal envueltas por la tercera formada solo por puntos de pliegue, así su grafo asociado tiene tres aristas con todos los pesos igual a cero en aristas y vértices pero distinta a la de  $f_1$ . En  $g_1$  tenemos una aplicación con un conjunto de ramificación formada por dos superficies una de ellas homeomorfa a un toro y la otra que está por dentro es homeomorfa a una esfera, así su grafo asociado formada por dos aristas, una arista con peso 1 y los demás pesos igual a cero. Finalmente en  $g_2$  tenemos una aplicación con un conjunto de ramificación formada por tres superficies una de ellas homeomorfa a un toro y las otras dos homeomorfas a una esfera, así su grafo asociado tiene tres arista con peso 1 y los demás pesos igual a cero.

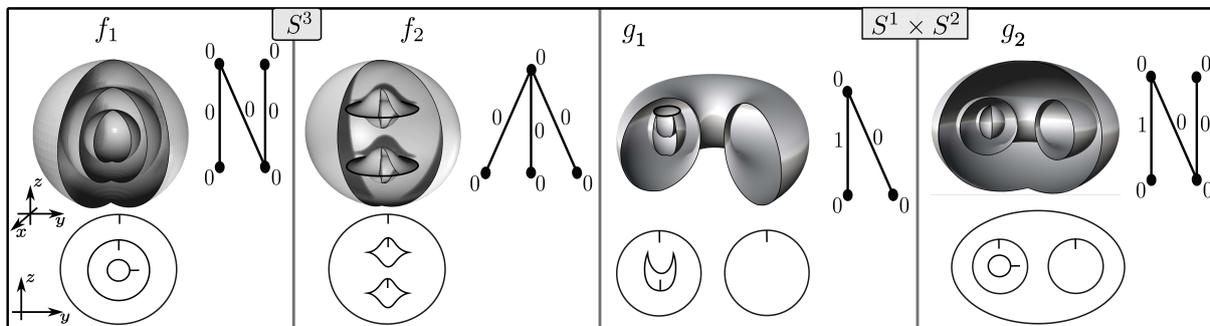


Figure 3: Ejemplo de grafos de aplicaciones estables.

En adelante cada vez que hablemos de grafos estaremos haciendo referencia a los grafos con pesos no negativos en los vértices y aristas.

### 3. Cirugía entre aplicaciones estables con $\mathcal{G}$ -grafo

Presentamos aquí dos tipos de cirugía entre aplicaciones de 3-variedades en  $\mathbb{R}^3$  y sus efectos en su grafo asociado  $\mathcal{G}$ , que denominaremos *cirugía horizontal* y *cirugía vertical*, para más detalles puede revisar [10,11].

#### Cirugía horizontal entre aplicaciones:

Dadas dos aplicaciones estables  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  y  $f' \in \mathcal{E}(M', \mathbb{R}^3)$ , donde  $M$  y  $M'$  son 3-variedades, llamaremos *cirugía horizontal* entre las aplicaciones  $f$  y  $f'$  a la aplicación  $f_{\mathbb{S}_h} f' : M \# M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ , construida como sigue: comenzamos removiendo dos 3-bolas  $B_1$  y  $B_2$  en  $M$  y  $M'$ , respectivamente, tales que sus intersecciones con el conjunto singular de  $f$  y  $f'$  son dos discos  $D_1$  y  $D_2$  de puntos de pliegue (no interceptan curvas cuspidales o curvas de pliegues dobles). Después, conectamos las variedades  $M$  y  $M'$  en  $\partial B_1$  y  $\partial B_2$  por un tubo  $S^2 \times I$  (donde  $D_1$  y  $D_2$  son unidos por un tubo  $S^1 \times I$ ). La proyección en  $\mathbb{R}^3$  de este tubo no intercepta parte alguna del conjunto de ramificación. El conjunto de ramificación de la aplicación resultante es la suma conexa de los conjuntos de ramificación de  $f$  y  $f'$ .

Si la cirugía horizontal se realiza en la misma aplicación  $f$  entonces se realiza de manera similar como fue definida  $f_{\mathbb{S}_h} f'$  (con la diferencia que las 3-bolas  $B_1$  y  $B_2$  removidas pertenecen solo a  $M$ ) y el resultado de está cirugía esta denotada y dada por la aplicación  $\mathbb{S}_h(f) : M \# (S^1 \times S^2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ .

Además el grafo asociado a  $f_{\mathbb{S}_h} f'$  y  $\mathbb{S}_h(f)$  será denotado por  $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_h} \mathcal{G}'$  y  $\mathbb{s}_h(\mathcal{G})$  respectivamente, donde  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son los grafos asociados a las aplicaciones  $f$  y  $f'$ .

**Observación 3.1.** Considerando  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  como los grafos asociados a las aplicaciones  $f$  y  $f'$ , respectivamente, el efecto de esta cirugía sobre estos grafos es como en la Figura 4(a). Observemos que la cirugía horizontal entre aplicaciones induce una cirugía entre de los conjuntos singulares (que no es nada más que a suma conexa de superficies) la cual resulta una superficie con género igual a la suma de las dos superficies involucradas; lo que implica que, si la cirugía se realiza en las superficies  $S_i$  y  $S_j$  asociadas a la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima aristas de  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$ , cuyos pesos son  $p_i$  y  $p_j$ , se tiene que  $p_i \# p_j = p_i + p_j$  ( puesto que  $g(S_i \# S_j) = g(S_i) + g(S_j)$ ), esto significa que significa que el peso en las aristas se suman, cuando se realiza la cirugía horizontal.

Por otro lado, el peso de los vértices se suman también; pues, si  $M_i$  y  $M_j$  son las regiones correspondientes a dichos vértices cuyos pesos son  $c_i$  y  $c_j$ . Siendo  $M_k$  es la región resultante, tenemos  $c_k = b_2(M_k) - s_k + 1 = b_2(M_i) + b_2(M_j) - (s_i + s_j - 1) + 1 = c_i + c_j$ .

### Cirugía vertical en aplicaciones:

Sea  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  una aplicación, donde  $M$  es una 3-variedad, remueva dos 3-bolas  $B_1$  y  $B_2$  en  $M$  en las regiones  $U_1$  y  $U_2$ , correspondientes a los vértices  $v_1$  y  $v_2$ , sin interceptar el conjunto singular  $\Sigma f$  y tales que tengan la misma imagen en  $\mathbb{R}^3$ . Una de las regiones preservando orientación y la otra aplicada revertiendo orientación. Después, unir los bordes  $M \setminus B_1 \cup B_2$  por un tubo  $S^2 \times I$ , de forma que tengan una superficie  $S^2$  como una superficie singular, que divide en dos partes iguales el tubo, cuyas imágenes coinciden cuando la aplicación es extendida sobre los mismos. Esta cirugía aumenta una esfera  $S^2$  al conjunto singular adyacente a las dos componentes del conjunto singular da la aplicación original, de donde las dos 3-bolas fueron retiradas aumentadas con parte del tubo. En el grafo corresponde, al conectar una arista en los vértices  $v_1$  y  $v_2$ , llamaremos a la aplicación resultante de este proceso como la *cirugía vertical* de  $f$  y denotada por  $\mathbb{S}_\nu(f)$ , que está definida en la 3-variedad  $(M)_\nu \simeq M \# (S^1 \times S^2)$ . Las dos regiones involucradas (correspondientes a los vértices  $v_1$  y  $v_2$ ), después de la cirugía, tienen un nuevo generador del segundo grupo de homología  $H_2$ , que es la  $S^2$  adicionado al conjunto singular. Más los componentes regulares correspondientes, tienen una nueva superficie en el borde (la misma  $S^2$ ); entonces, el peso no varía.

Si  $f' \in \mathcal{E}(M', \mathbb{R}^3)$  entonces la cirugía vertical entre dos aplicaciones se realiza de manera similar como fue definida  $\mathbb{S}_\nu(f)$  (con la diferencia que las 3-bolas  $B_1$  y  $B_2$  removidas pertenecen a  $M$  y a  $M'$  respectivamente) y el resultado de está cirugía está denotada y dada por la aplicación  $f_{\mathbb{S}_\nu} f' : M \# M' \longrightarrow \mathbb{R}^3$ .

Además el grafo asociado a  $f_{\mathbb{S}_\nu} f'$  y  $\mathbb{S}_\nu(f)$  será denotado por  $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_\nu} \mathcal{G}'$  y  $\mathbb{s}_\nu(\mathcal{G})$  respectivamente, donde  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son los grafos asociados a las aplicaciones  $f$  y  $f'$ .

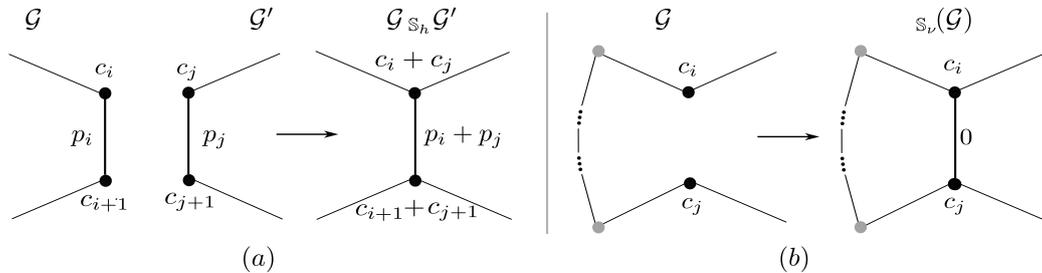


Figure 4: Cirugía  $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_h} \mathcal{G}'$  y  $\mathbb{s}_\nu(\mathcal{G})$  de grafos.

La proposición siguiente es un resultado inmediato por como se definió las cirugías en aplicaciones estables.

**Proposición 3.2.** *La aplicación resultante de una cirugía horizontal o cirugía vertical entre dos aplicaciones estables lo mismo ocurre para una cirugía horizontal y vertical sobre una misma aplicación estable.*

**Ejemplo 3.3.** La Figura 5(a) se ilustra cirugía horizontal entre dos aplicaciones idénticas  $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_1, \mathbb{R}^3)$  cuyo conjunto singular es homeomorfa a un toro formada solo por puntos de pliegue, al realizar la cirugía obtenemos la aplicación  $f_{\mathbb{S}_h} f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_2, \mathbb{R}^3)$  cuyo conjunto singular es homeomorfa a un bitoro, donde su grafo asociado que tiene una arista y peso 0 en sus vértices y peso 2 en la su arista el cual es resultado de la cirugía horizontal realizada. Por su parte en la Figura 5(b) se ilustra cirugía vertical en la misma aplicación  $g \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$  cuyo conjunto singular es homeomorfa a una esfera formada solo por puntos de pliegue, al realizar la cirugía obtenemos la aplicación  $\mathbb{S}_v(g) \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_1, \mathbb{R}^3)$  cuyo conjunto singular esta formada por dos superficies homeomorfa a una esfera, donde su grafo asociado es un ciclo con dos aristas y pesos cero en vértices y aristas.

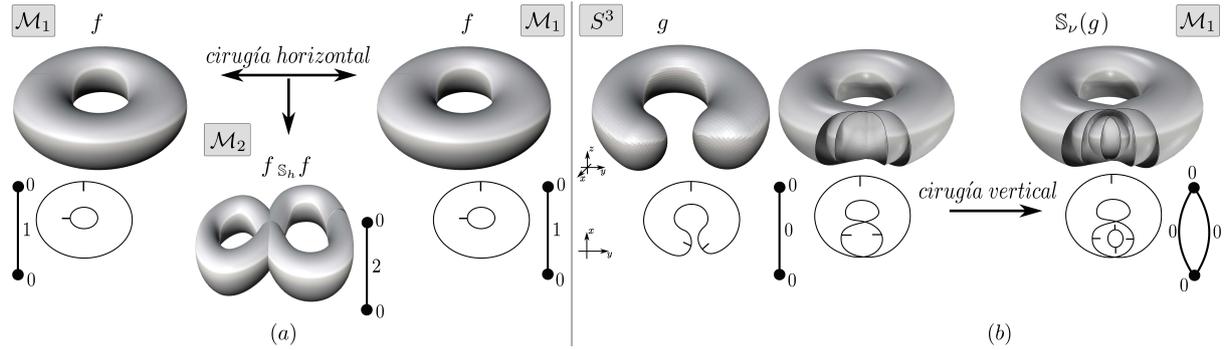


Figure 5: Ejemplo de cirugía vertical en el  $\mathcal{G}$ -grafo de  $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ .

**Observación 3.4.** Sea  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  y  $\mathcal{G}'(V', E', W_{v'}, W_{e'})$  son los grafos asociados a las aplicaciones  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  y  $f' \in \mathcal{E}(M', \mathbb{R}^3)$  respectivamente, entonces la cirugía horizontal y vertical entre estas dos aplicaciones inducen cirugías entre sus grafos asociados como en la Figura 4(a) y cuyos efectos en la notación del grafo es como sigue:

- $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)_{\mathbb{S}_h} \mathcal{G}'(V', E', W_{v'}, W_{e'}) = \mathcal{G}_{\mathbb{S}_h} \mathcal{G}'(V + V' - 2, E + E' - 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$ ,
- $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)_{\mathbb{S}_v} \mathcal{G}'(V', E', W_{v'}, W_{e'}) = \mathcal{G}_{\mathbb{S}_v} \mathcal{G}'(V + V', E + E' + 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$ .

y las cirugías vertical y horizontal realizadas en una misma aplicación inducen cirugías en su grafo asociado como en la Figura 4(b) y cuyos efectos en la notación del grafo es como sigue:

- $\mathbb{S}_h(\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)) = \mathbb{S}_h(\mathcal{G})(V - 2, E - 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$ ,
- $\mathbb{S}_v(\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)) = \mathbb{S}_v(\mathcal{G})(V, E + 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$ .

**Ejemplo 3.5.** Sean  $i_0, j_0, k_0 \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$  y  $j_1, \ell_1 \in \mathcal{E}(S^1 \times S^2, \mathbb{R}^3)$ , cuyas superficies en la Figura 6 son sus conjuntos de ramificación, junto con sus grafos asociados respectivamente, detallando:

$i_0$  : Es una aplicación con un conjunto de ramificación formada por una superficie homeomorfa a una esfera formada por puntos pliegue, así su grafo asociado es  $\mathcal{J}_0(2, 1, 0, 0)$ .

$j_0$  : Es una aplicación con un conjunto de ramificación formada por una superficie homeomorfa a un toro que tiene tres curvas cuspidales, así su grafo asociado es  $\mathcal{J}_0(2, 1, 0, 1)$ .

$\kappa_0$  : Es una aplicación con un conjunto de ramificación formada por dos superficies homeomorfa a una esfera y una de ellas tiene una curvas cuspidales, así su grafo asociado es  $\mathcal{K}_0(3, 2, 0, 0)$ .

$j_1$  : Es una aplicación con un conjunto de ramificación formada por una superficie homeomorfa a un toro formada solo por puntos pliegue, así su grafo asociado es  $\mathcal{J}_1(2, 1, 0, 1)$ .

$\ell_1$  : Es una aplicación con un conjunto de ramificación formada por una superficie homeomorfa a una esfera la cual tiene un eje cuspidal, así su grafo asociado es  $\mathcal{L}_1(2, 1, 1, 0)$ .

Notemos que los grafos  $\mathcal{J}_0$  son idénticos  $\mathcal{J}_1$  como grafos, lo único que les diferencia es que están asociados a aplicaciones donde sus dominios son distintos. De esta forma los sub-índices en cada grafo representa el número de Betti de su 3-variedad asociada, pues  $b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_0)) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_0)) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{K}_0)) = b_2(S^3) = 0$  y  $b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_1)) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{L}_1)) = b_2(S^1 \times S^2) = 1$ .

También tenemos que  $\mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{K}_0$ ,  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{L}_1$  representan a un único grafo.

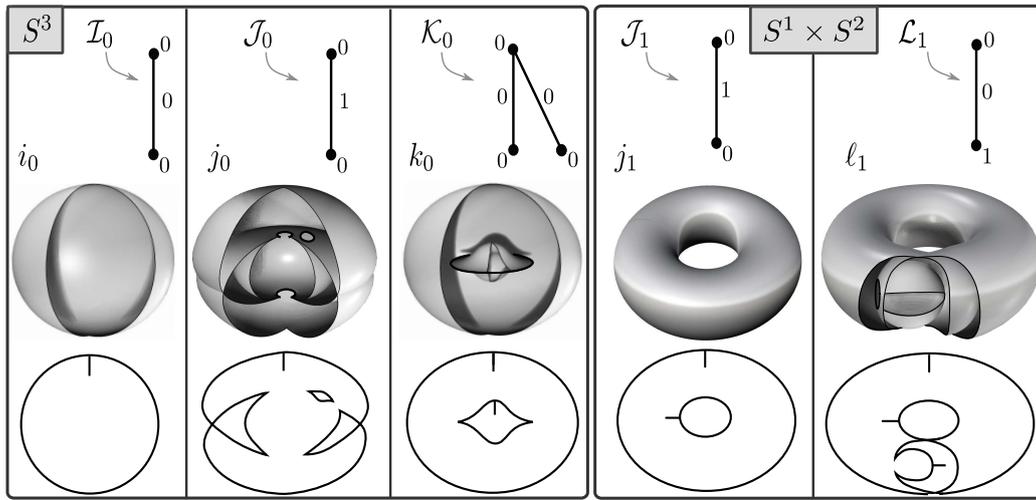


Figure 6: Grafos básicos de las aplicaciones en  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ .

**Definición 3.6.** Las aplicaciones  $i_0, j_0, k_0 \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$  y  $j_1, \ell_1 \in \mathcal{E}(S^1 \times S^2, \mathbb{R}^3)$  serán llamados *aplicaciones básicas* de  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  y sus grafos asociados  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{L}_1$  del Ejemplo 3.5, serán llamados de *grafos básicos* para las aplicaciones de  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ , para  $n$  entero no negativo.

**Observación 3.7.** Observe que la aplicación  $f_1$  de la Figura 3 es resultado de la cirugía vertical de dos aplicaciones  $i_0$ , por tanto  $f_1$  puede ser expresado como:  $f_1 = i_0 \mathbb{S}_\nu i_0$ . Así también las demás aplicaciones  $f_2, h_1$  y  $h_2$  de la Figura 3 se pueden expresar como:  $f_2 = \kappa_0 \mathbb{S}_h \kappa_0$ ,  $g_1 = j_0 \mathbb{S}_h j_1$  y  $g_2 = i_0 \mathbb{S}_\nu j_1$ , además sus grafos asociados se obtienen naturalmente usando las cirugías ya introducidas, por tanto construir aplicaciones a partir de otras aplicaciones es equivalente a construir grafos a partir de los grafos asociados a las aplicaciones usando cirugías respectivamente, esta última parte de esta observación será fundamental para probar resultados no triviales.

De esta forma es posible construir aplicaciones estables usando las aplicaciones básicas equivalentemente podemos construir aplicaciones usando solo los grafos básicos, esto será útil para responder a la siguiente pregunta.

**Pregunta:** ¿será posible que dado un grafo bipartito pesado cualesquiera podemos construir una aplicación estable de una  $\mathcal{M}_n$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que su grafo asociado sea exactamente el grafo que dimos, usando cirugías entre los grafos básicos y por ende las aplicaciones básicas?

Esta pregunta será respondida afirmativamente más adelante, entre otras cuestiones y además solo serán necesarias la cirugía horizontal entre dos aplicaciones y la cirugía vertical en una misma aplicación. Por tal motivo en la siguiente sección solo se introducirá estas cirugías entre grafos pesados que son inducidas naturalmente de las cirugías entre aplicaciones.

#### 4. Grafos bipartitos pesados

Denotemos por  $\mathbb{G}$  el conjunto de todos los grafos bipartitos con pesos enteros no negativos en las aristas y vértices. Las cirugías de aplicaciones estables inducen cirugías sobre los grafos de  $\mathbb{G}$ . Como definiremos a seguir

##### 4.1. Cirugías.

*Cirugía* es una operación que une dos grafos de  $\mathbb{G}$  o une dos vértices en un mismo grafo (ver Figura 7). Estas cirugías se definen exactamente de la siguientes dos maneras:

**Definición 4.1.** Dados  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbb{G}$  la *cirugía horizontal* y *cirugía vertical* entre  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$  denotada por  $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}$  y  $\mathcal{G} \oplus_\nu \mathcal{H}$  respectivamente, se define como:

- a)  $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}$ : esta cirugía es construido en tres etapas: (i) se elige una arista en cada grafo correspondiente. (ii) se identifican las aristas elegidas con sus vértices respectivos, uniendo así los grafos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ . (iii) se suman los pesos de los vértices y aristas identificadas, el grafo obtenido por este proceso será denotado por  $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}$ , una representación gráfica de esta cirugía está en la Figura 7(a). Si esta cirugía se hace en el mismo grafo  $\mathcal{G}$  se escogen las aristas de forma que el nuevo grafo resultante al realizar la cirugía horizontal sea bipartito y será denotado por  $\oplus_h(\mathcal{G})$ .
- b)  $\mathcal{G} \oplus_\nu \mathcal{H}$ : esta cirugía es construido en tres etapas: (i) se elige un vértice en cada grafo. (ii) se unen por una arista los vértices elegidos, uniendo así los grafos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ . (iii) el peso en la arista que se creó para unir los vértices en cero y los pesos en los vértices no cambian, finalmente el grafo obtenido de esta forma será denotado por  $\mathcal{G} \oplus_\nu \mathcal{H}$ . Si esta cirugía se hace en el mismo grafo  $\mathcal{G}$  se escogen los vértices de forma que el nuevo grafo resultante al realizar la cirugía vertical sea bipartito y será denotado por  $\oplus_\nu(\mathcal{G})$ , una representación gráfica de esta cirugía está en la Figura 7(b).

Note que el grafo  $\oplus_\nu(\mathcal{G})$  tiene un ciclo a más que  $\mathcal{G}$ .

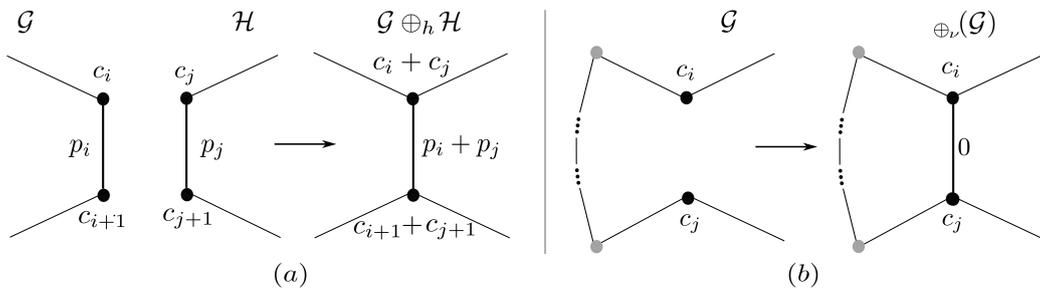


Figure 7: Operaciones entre grafos bipartitos.

**Definición 4.2.** Llamados *grafos básicos* de  $\mathbb{G}$  los siguientes grafos  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 0)$ ,  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 1)$ ,  $\mathcal{K}(3, 2, 0, 0)$ , y  $\mathcal{L}(2, 1, 1, 0)$ .

Note que los grafos básicos tienen una representación única.

**Notación:** Denotamos por  $\mathcal{G}^{\oplus_h k}$  a la suma horizontal de  $k$ -copias de  $\mathcal{G}$ , así  $\underbrace{\mathcal{G} \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{G}}_{k\text{-veces}} = \mathcal{G}^{\oplus_h k}$  y si consideramos  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  tenemos:

$$\underbrace{\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{G}^{\oplus_h k}(V + (k-1)(V-2), E + (k-1)(E-1), kW_v, kW_e),$$

y en particular

- $\underbrace{\mathcal{J}(2, 1, 0, 0) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{J}(2, 1, 0, 0)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{J}^{\oplus_h k}(2, 1, 0, 0) = \mathcal{J}(2, 1, 0, 0).$
- $\underbrace{\mathcal{J}(2, 1, 0, 1) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{J}(2, 1, 0, 1)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{J}^{\oplus_h k}(2, 1, 0, k).$
- $\underbrace{\mathcal{K}(3, 2, 0, 0) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{K}(3, 2, 0, 0)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{K}^{\oplus_h k}(k+2, k+1, 0, 0).$
- $\underbrace{\mathcal{L}(2, 1, 1, 0) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{L}(2, 1, 1, 0)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{L}^{\oplus_h k}(2, 1, k, 0).$
- $\mathcal{J}(2, 1, 0, 0) \oplus_h \mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) = \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{G}(V+2-2, E+1-1, W_v, W_e)$   
 $= \mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  entonces tenemos  
 $\mathcal{J} \oplus_h \mathcal{G} = \mathcal{G} = \mathcal{G} \oplus_h \mathcal{J}.$

Además se cumple  $\mathcal{G}^{\oplus_h k} \oplus_h \mathcal{G}^{\oplus_h \tau} = \mathcal{G}^{\oplus_h (k+\tau)}$  y por convención  $\mathcal{G}^{\oplus_h k} = \mathcal{J}$  si  $k = 0$ .

**Proposición 4.3.** *Sea  $\mathcal{G}(V, E, 0, W_e) \in \mathbb{G}$  un grafo árbol con peso cero en sus vértices entonces  $\mathcal{G}$  puede escribirse como combinación lineal de los grafos básicos  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 0)$ ,  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 1)$  y  $\mathcal{K}(3, 2, 0, 0)$  usando la cirugía horizontal  $\oplus_h$  en grafos. Además  $\mathcal{G}$  puede escribirse como:*

$$\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}.$$

**Demostración:** Daremos una prueba por inducción sobre el número de aristas. Sea  $\mathcal{G}$  un grafo árbol con una sola arista (es decir  $E = 1$ ) y cualquier peso  $g$  en esta arista. Si  $g = 0$  entonces  $\mathcal{G} = \mathcal{J}(2, 1, 0, 0)$ . En el caso general si  $g > 0$ , este grafo lo construimos sumando horizontalmente  $g$  veces los grafos  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 1)$ . Ahora dado un grafo  $\mathcal{G}$  árbol con  $E > 1$  aristas y con pesos  $g_i$  en sus aristas  $g_i \in \mathbb{N} \forall i = 1, \dots, m$ . Haremos esto en tres pasos:

- (1) Comencemos retirando todos los pesos  $g_i$  de cada  $i$ -ésima arista (note que  $W_e = \sum_{i=1}^E g_i$ ) de  $\mathcal{G}$ , así obtenemos un nuevo grafo  $\mathcal{G}'$  que tiene  $E$  aristas con pesos nulos, ver Figura 8.
- (2) Ahora haciendo cirugía horizontal de  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 0)$  con  $E-1$  grafos básicos  $\mathcal{K}(3, 2, 0, 0)$  de forma que al final obtenemos el grafo  $\mathcal{G}'$ .
- (3) Haciendo cirugía horizontal del grafo  $\mathcal{G}'$  con  $W_e$  grafos básicos  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 1)$  de forma que restituimos todos los pesos en las aristas hasta obtener el grafo  $\mathcal{G}$ , ver Figura 8.

Así  $\mathcal{G}(V, E, 0, W_e)$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{J}(2, 1, 0, 0) \oplus_h \underbrace{\mathcal{K}(3, 2, 0, 0) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{K}(3, 2, 0, 0)}_{(E-1)\text{-veces}} \oplus_h \underbrace{\mathcal{J}(2, 1, 0, 1) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{J}(2, 1, 0, 1)}_{W_e\text{-veces}} \\ &= \mathcal{J}(2, 1, 0, 0) \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)}((E-1)+2, (E-1)+1, 0, 0) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}(2, 1, 0, W_e), \\ &= \mathcal{J}(2, 1, 0, 0) \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)}(E+1, E, 0, 0) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}(2, 1, 0, W_e), \\ &= \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}(E+1+2-2, E+1-1, 0, W_e), \\ &= \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}(E+1, E, 0, W_e), \quad \text{y como } V = E+1, \\ &= \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}(V, E, 0, W_e). \end{aligned}$$

Por tanto los grafos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}$ , tienen el mismo número de vértices, aristas y pesos en sus aristas.  $\square$

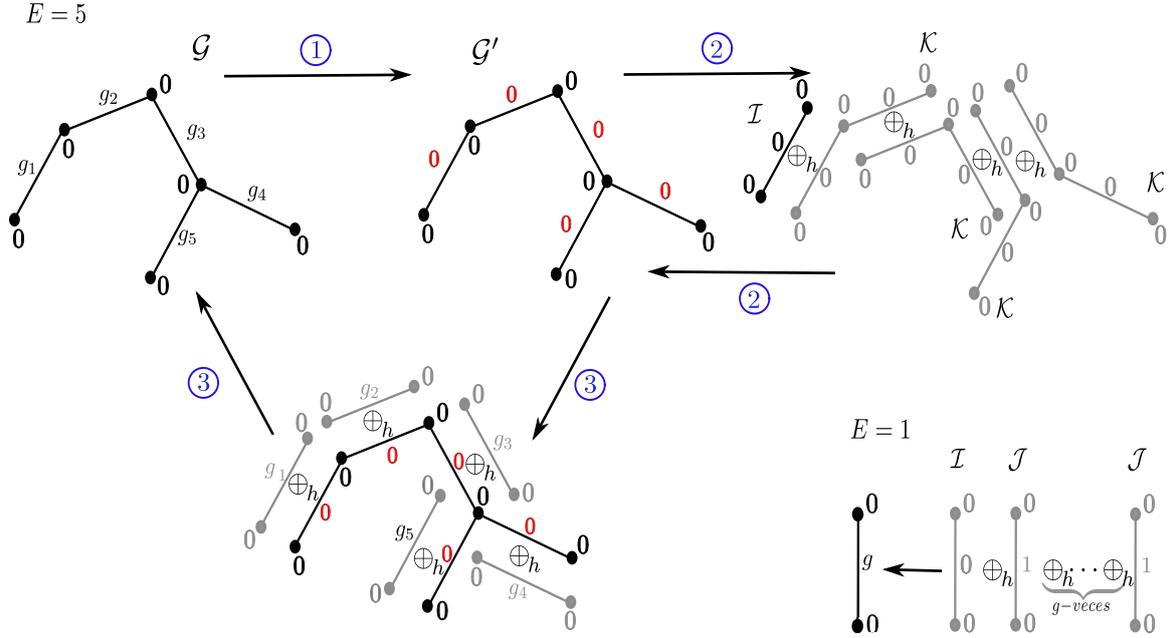


Figure 8: Esquema de demostración de la Proposición 4.3, caso  $E = 1, E = 5$ .

Denotemos por  $\oplus_{\nu}^k(\mathcal{G})$  a la cirugía  $k$ -veces realizada en un mismo grafo  $\mathcal{G}$ , es decir:

$$\oplus_{\nu}^k(\mathcal{G}) = \underbrace{\oplus_{\nu}(\cdots \oplus_{\nu}(\oplus_{\nu}(\mathcal{G})) \cdots)}_{k\text{-veces}},$$

y por convención si  $k = 0$ , se tiene que  $\oplus_{\nu}^0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ .

**Proposición 4.4.** *Sea  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$  entonces este grafo puede escribirse como combinación lineal de los grafos básicos  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 0)$ ,  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 1)$ ,  $\mathcal{K}(3, 2, 0, 0)$ , y  $\mathcal{L}(2, 1, 1, 0)$  usando la cirugía horizontal  $\oplus_h$  y cirugía vertical  $\oplus_{\nu}$  en el mismo grafo. Además  $\mathcal{G}$  puede escribirse como:*

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v},$$

donde  $\eta = \sum_{k=1}^{1-V+E} g_k$ , con  $g_k$  es el peso de una arista en  $\mathcal{G}$  de forma que si se retiran esas aristas el nuevo grafo obtenido es un árbol.

**Demostración:** Mostraremos por construcción, dividiéndolo en siete pasos (ver Figura 9 para un esquema de la demostración):

- (1) Retiramos todos los pesos ( $W_v$ ) de los vértices del grafo  $\mathcal{G}$ , obtenemos así un nuevo grafo  $\dot{\mathcal{G}}$ .
- (2) Del grafo  $\dot{\mathcal{G}}$ , identificamos un número mínimo de aristas  $E'$  en  $\dot{\mathcal{G}}$  (de forma que si las retiramos obtendríamos un árbol conexo), este número coincide con  $E' = b_1(\mathcal{G}) = 1 - V + E$ , retirando todos los pesos  $g_k$  de estas aristas identificadas (sea  $\eta = \sum_{k=1}^{1-V+E} g_k$  la suma de todos los peso de las arista identificadas), obtenemos el grafo  $\ddot{\mathcal{G}}$ , con peso 0 en todas sus aristas identificadas.
- (3) Luego del grafo  $\ddot{\mathcal{G}}$ , retiramos las  $1 - V + E$  aristas identificadas; así, obtenemos el grafo  $\ddot{\ddot{\mathcal{G}}}$ , que es un árbol con peso cero en sus vértices y sus respectivos pesos en sus aristas.
- (4) Por la Proposición 4.3,  $\ddot{\ddot{\mathcal{G}}}$  puede expresarse en términos de los grafos básicos usando las cirugías entre grafos y esta dado por:

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{\mathcal{G}}} &= \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(E-1-(1-V+E))} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}(V, E - (1 - V + E), 0, W_e - \eta), \\ &= \mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}(V, V - 1, 0, W_e - \eta). \end{aligned} \quad (4.1)$$

- (5) Ahora, haciendo  $1 - V + E$  sumas verticales en el mismo grafo  $\ddot{\mathcal{G}}$  entre los dos vértices incidentes en cada una de las  $1 - V + E$  aristas retiradas, obtenemos así el grafo  $\dot{\mathcal{G}}$ .
- (6) haciendo sumas horizontales convenientemente entre  $\dot{\mathcal{G}}$  con  $\eta$  grafos básicos  $\mathcal{J}(2, 1, 0, 1)$  que aumentan los pesos  $g_k$  de las aristas identificadas en  $\dot{\mathcal{G}}$ , obtenemos así el grafo  $\mathcal{G}$ .

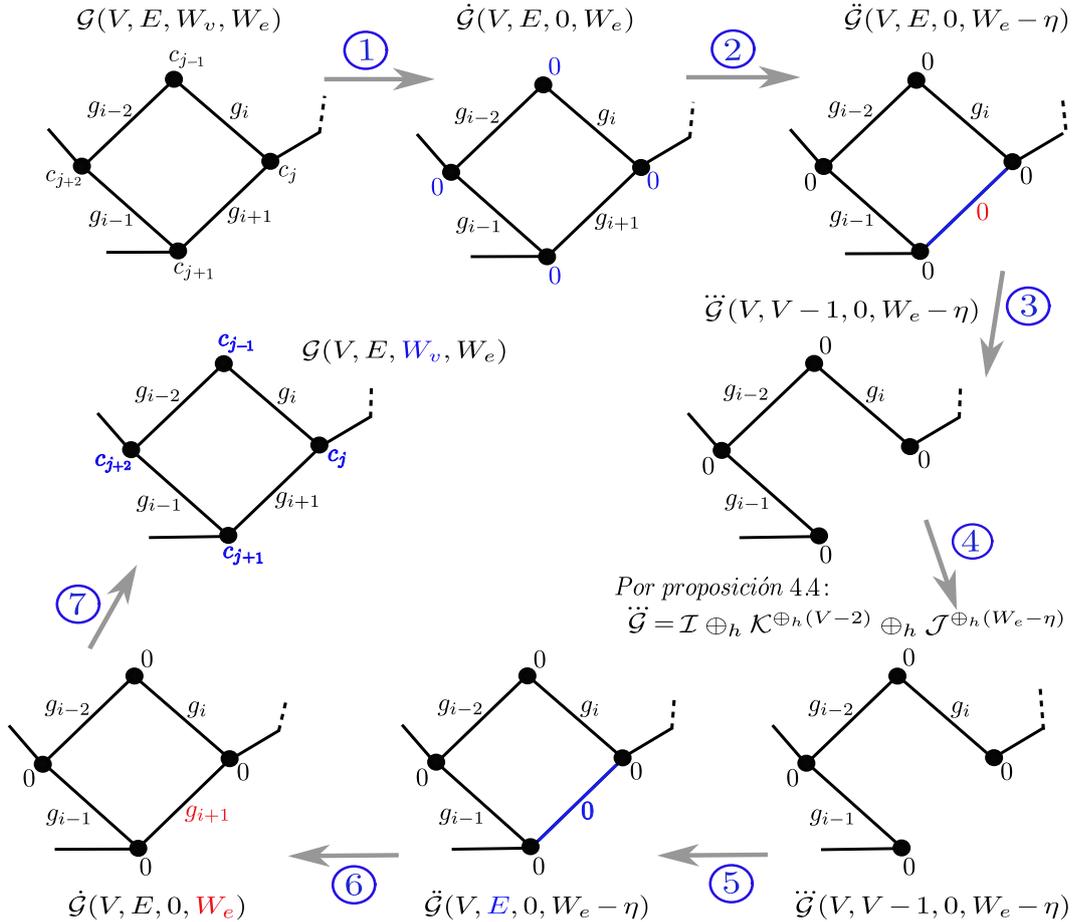


Figure 9: Esquema de demostración de la Proposición 4.4.

- (7) Por último, haciendo sumas horizontales convenientemente entre  $\dot{\mathcal{G}}$  y  $W_v$  grafos básicos  $\mathcal{L}(2, 1, 1, 0)$ , obtenemos el grafo  $\mathcal{G}$ , con sus pesos originales.

Así  $\mathcal{G}(V, E, 0, W_e)$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \underbrace{\oplus_{\nu}(\cdots \oplus_{\nu}(\oplus_{\nu}(\ddot{\mathcal{G}}))\cdots)}_{(1-V+E)\text{-veces}} \oplus_h \underbrace{\mathcal{J}(2, 1, 0, 1) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{J}(2, 1, 0, 1)}_{\eta\text{-veces}} \oplus_h \underbrace{\mathcal{L}(2, 1, 1, 0) \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{L}(2, 1, 1, 0)}_{W_v\text{-veces}}, \\
 &= \oplus_{\nu}^{1-V+E}(\ddot{\mathcal{G}})(V, E, 0, W_e - \eta) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta}(2, 1, 0, \eta) \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}(2, 1, W_v, 0), \\
 &= \oplus_{\nu}^{1-V+E}(\ddot{\mathcal{G}}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta}(V + 2 - 2, E + 1 - 1, 0, W_e - \eta + \eta) \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}(2, 1, W_v, 0), \\
 &= \oplus_{\nu}^{1-V+E}(\ddot{\mathcal{G}}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta}(V, E, 0, W_e) \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}(2, 1, W_v, 0), \\
 &= \oplus_{\nu}^{1-V+E}(\ddot{\mathcal{G}}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}(V + 2 - 2, E + 1 - 1, W_v, W_e), \\
 &= \oplus_{\nu}^{1-V+E}(\ddot{\mathcal{G}}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}(V, E, W_v, W_e), \text{ luego sustituyendo } \ddot{\mathcal{G}}, \\
 &= \oplus_{\nu}^{1-V+E}(\mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}(V, E, W_v, W_e),
 \end{aligned}$$

Así los grafos  $\mathcal{G}$  y  $\oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v})$ , tienen el mismo número de vértices, aristas y pesos en sus aristas como en los vértices.  $\square$

### 5. Construcción de aplicaciones estables

Recordemos que  $\mathcal{M}_n$  a la 3-variedad obtenida por la suma conexa de  $n$  copias de  $S^1 \times S^2$ , para  $n$  entero no negativo, con  $\mathcal{M}_0 = S^3$ .

Sea  $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ , para esta aplicación existe un grafo asociado a este. Ahora dado un grafo bipartito  $\mathcal{G}$  En esta sección construiremos aplicaciones concretas cuyo grafo asociado a este sea igual al grafo  $\mathcal{G}$ , todo esto usando cirugías y aplicaciones básicas.

Para construir estas aplicaciones, definamos las aplicaciones básicas y usando las cirugías entre aplicaciones estables de la sección anterior, daremos un esquema de construcción de las aplicaciones que realizan a un grafo  $\mathcal{G}$  fijado.

Sea  $\mathbb{G}_F$  el conjunto de todas los grafos que son asociados a aplicaciones estables de  $\mathcal{M}_n$  así tenemos que:

$$\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3) := \{\mathcal{G}_f : f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3), n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}.$$

**Teorema 5.1.** *El conjunto de todos los grafos bipartitos  $\mathbb{G}$  es igual a  $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ . Además si  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  entonces*

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \quad (5.1)$$

donde  $i$  puede tomar  $i = 0, 1$  pues  $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_1$  como grafos.

**Demostración:** Mostremos que  $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3) \subset \mathbb{G}$ . Dado  $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  entonces por construcción  $\mathcal{G}$  es bipartito y con peso en las aristas y vértices por tanto  $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$ .

Ahora para  $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ . Dado  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$  entonces mostremos que este grafo es un  $\mathcal{R}$ -grafo para  $\mathcal{M}_n$  lo que implica que  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ . Así por la Proposición 4.4 tenemos que:

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}), \quad (5.2)$$

donde  $\eta = \sum_{k=1}^{1-V+E} g_k$ , con  $g_k$  es el peso de una arista en  $\mathcal{G}$  de forma que si se retiran esas aristas el nuevo grafo obtenido es un árbol. Pero como  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$  y  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ , entonces reemplazando en 5.2 tenemos que:

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}),$$

donde  $i = 0$  ó  $i = 1$ .

Así  $\mathcal{G}$  esta expresado como cirugías entre grafos básicos de  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ , luego  $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ , puesto que  $\oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}) \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ .  $\square$

**Corolario 5.2.** *Si  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$ . Entonces existe una aplicación estable de  $\mathcal{M}_n$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que su grafo asociado coincide con  $\mathcal{G}$ . Y una representación para el grafo esta dado por*

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \quad (5.3)$$

donde  $i = 1, 0$  y además  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{L}_1$  son los grafos básicos para  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ .

**Demostración:** Es una consecuencia directa de la Proposición 4.4.  $\square$

**Corolario 5.3.** *Si  $\mathcal{G}(V, E, 0, W_e) \in \mathbb{G}$  es un grafo árbol. Entonces existe una aplicación estable de  $S^3$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que su grafo asociado coincide con  $\mathcal{G}$ . Y una representación para el grafo esta dado por*

$$\mathcal{G} = \mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_0^{\oplus_h W_e},$$

donde  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_0$  y  $\mathcal{K}_0$  son los grafos básicos para  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ .

**Demostración:** En general dado  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$  por 5.3 de la Proposición 4.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(V, E, W_v, W_e) &= \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}(V, E, W_v, W_e), \\ \text{para este caso } W_v &= 0, \text{ y } 1 - V + E = 0 \text{ ya que } \mathcal{G} \text{ es un árbol, entonces} \\ \mathcal{G}(V, E, 0, W_e) &= \oplus_{\nu}^0 (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h 0}(V, E, 0, W_e), \\ &= \mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{J}_0(V, E, 0, W_e), \\ &= \mathcal{J}_0^{\oplus_h 2} \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta+\eta)}(V, E, 0, W_e), \\ &= \mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}(V, E, 0, W_e) \text{ y como } 1 - V + E = 0 \text{ tenemos} \\ &= \mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}(V, E, 0, W_e), \end{aligned}$$

donde  $i = 1, 0$ . Así  $\mathcal{G} = \mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}$  y como  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_i$  (cuando  $i = 0$ ),  $\mathcal{K}_0$  son grafos de aplicaciones en  $\mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$  y la cirugía  $\oplus_h$  en estos grafos viene de cirugías entre dos aplicaciones entonces el grafo  $\mathcal{G} = \mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_0^{\oplus_h W_e}$  es grafo de una aplicación estable de  $S^3$  en  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Observación 5.4.** Sea  $\mathcal{G}$  el grafo asociado a la aplicación  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  entonces recordemos que  $M$  es la 3-variedad asociada de  $\mathcal{G}$  y la denotamos por  $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = M$ . Y su relación con la suma horizontal y vertical entre grafos está dado por

$$\mathcal{V}(\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}) = \mathcal{V}(\mathcal{G}) \# \mathcal{V}(\mathcal{H}) = M \# N, \quad \text{y} \quad \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{G})) = \mathcal{V}(\mathcal{G}) \# \mathcal{M}_k.$$

Considerando los grafos básicos de  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  dados por  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{L}_1$ , con  $k$  entero no negativo entonces

- $\mathcal{V}(\mathcal{J}_0^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{J}_0) \# \dots \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_0)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{S^3 \# \dots \# S^3}_{k\text{-veces}} = S^3.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{J}_0^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{J}_0) \# \dots \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_0)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{S^3 \# \dots \# S^3}_{k\text{-veces}} = S^3.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{K}_0^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{K}_0) \# \dots \# \mathcal{V}(\mathcal{K}_0)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{S^3 \# \dots \# S^3}_{k\text{-veces}} = S^3.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{J}_1^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{J}_1) \# \dots \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_1)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{M}_k.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{L}_1) \# \dots \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{M}_k.$
- $\mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{J}_0)) = \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{J}_0)) = \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{K}_0)) = \mathcal{M}_k, \quad \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{J}_1)) = \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{L}_1)) = \mathcal{M}_{k+1}.$

**Proposición 5.5.** Sea  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  un grafo en  $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ . Entonces el mínimo y máximo valor que puede tomar  $b_2(\mathcal{M}_n)$  es:

$$\min\{b_2(\mathcal{M}_n)\} = W_v + 1 - V + E \quad \text{y} \quad \max\{b_2(\mathcal{M}_n)\} \leq W_v + W_e + 1 - V + E.$$

**Demostración:** Por la Teorema 5.1 tenemos que

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \quad i = 0, 1$$

luego si  $\mathcal{M}_n$  es la 3-variedad del dominio de la aplicación cuyo grafo es  $\mathcal{G}$ . Entonces  $b_2(\mathcal{V}(\mathcal{G})) = b_2(\mathcal{M}_n)$ , así primero calculemos quien es  $\mathcal{M}_n$  por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \mathcal{V}(\mathcal{G}) \\ &= \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \# \mathcal{M}_{1-V+E} \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta}) \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{J}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta}) \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}) \# \mathcal{M}_{1-V+E}, \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{J}_0) \# \mathcal{V}(\mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)}) \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta}) \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}) \# \mathcal{M}_{1-V+E}, \\ &= S^3 \# S^3 \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta+\eta)}) \# \mathcal{M}_{W_v} \# \mathcal{M}_{1-V+E}, \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

por tanto  $b_2(\mathcal{M}_n) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus h} W_e) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E})$  y vemos que el mínimo valor de  $b_2(\mathcal{M}_n)$  se da cuando  $i = 0$  pues es cuando  $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_0$  y no aporta en nada al número de Betti de  $\mathcal{M}_n$  pues  $\mathcal{V}(\mathcal{J}_0) = S^3$ , así

$$\min\{b_2(\mathcal{M}_n)\} = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_0^{\oplus h} W_e) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}) = b_2(S^3 \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}) = W_v + 1 - V + E.$$

De manera análoga el valor mas alto que puede tomar  $b_2(\mathcal{M}_n)$  está acotado por

$$\begin{aligned} b_2(\mathcal{M}_n) &= b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus h} W_e) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}), \quad \text{cuando } i = 1, \text{ luego} \\ \max(b_2(\mathcal{M}_n)) &\leq b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_1^{\oplus h} W_e) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}), \\ &= b_2(\mathcal{M}_{W_e} \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}), \\ &= b_2(\mathcal{M}_{W_e+W_v+1-V+E}) = W_e + W_v + 1 - V + E. \end{aligned}$$

Con lo cual terminamos la demostración.  $\square$

**Corolario 5.6.** *Sea  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$  un grafo árbol en  $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ . Entonces el mínimo y máximo valor que puede tomar  $b_2(\mathcal{M}_n)$  está dado por:*

$$\min\{b_2(\mathcal{M}_n)\} = W_v \quad y \quad \max\{b_2(\mathcal{M}_n)\} \leq W_v + W_e.$$

**Demostración:** Es inmediato de la Proposición 5.5 y teniendo en cuenta que en un grafo árbol se verifica que  $1 - V + E = 0$ .  $\square$

Como aplicación de la construcción de aplicaciones estables en  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  usando cirugías y grafos básicos introducidos en este trabajo daremos otra demostración al Teorema 5.1 de [11].

**Teorema 5.7.** [11] *Dado cualquier grafo bipartito  $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$ . Entonces  $\mathcal{G}$  es realizable por una aplicación  $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$  si y solo si*

$$W_v + 1 - V + E \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq W_v + W_e + 1 - V + E, \quad (5.4)$$

donde la igualdad se alcanza cuando  $W_e = 0$ .  $b_2(\mathcal{M}_n)$  es el segundo número de Betti de  $\mathcal{M}_n$ .

**Demostración:**

Como  $\min\{b_2(\mathcal{M}_n)\} \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq \max\{b_2(\mathcal{M}_n)\}$ , la necesidad viene directamente de la Proposición 5.5. Y la suficiencia viene del Teorema 5.1.  $\square$

## 6. Conclusiones

Este trabajo puede ayudar al lector en la construcción de aplicaciones estables de 3-variedades en  $\mathbb{R}^3$  con un conjunto singular pré-determinado, que en general no es trivial.

El Teorema 5.7 esta enunciado y probado en [11] la diferencia sustancial es que la prueba que presentan los autores en dicho articulo hacen uso de resultados de Topología Algebraica, Homología, entre otros. En este trabajo sólo usamos las cirugías entre aplicaciones estables que introducen los mismos autores en el mismo articulo.

Para establecer la igualdad en la ecuación 5.4 del Teorema 5.7 sin que  $W_e$  sea necesariamente cero, es posible el cual es un trabajo que está siendo escrito.

## References

1. V. V. Goryunov, *Local invariants of maps between 3-manifolds*. J. Topol. 1-20, (2013)
2. C. G. Gibson, *Singular Points of Smooth Mappings*. Reasearch Notes in Mathematics, Pitman, London, (1978).
3. D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, *Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data*, Topology and Its Appl. 154, 166-175, (2007).
4. D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, *Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint*, Real and Complex Singularities. (2003).
5. N. B. Huamaní, *Grafos asociados às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas e orientadas no  $\mathbb{R}^3$* , Dissertação de Mestrado. (2016).

6. N. B. Huamani, Mendes de Jesus C. and Palacios J, Invariants of stable maps from the 3-sphere to the Euclidean 3-space, Bull Braz Math Soc, New Series 50, 913 (2019).
7. J. N. Mather, *Stability of  $C^1$  Mappings VI: The Nice Dimensions*, Proc. Liverpool Singularities-Sympos. 92, 207-253, (1971).
8. W. Marar and F. Tari, *On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$* , Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 119(3), 469–481 (1996).
9. C. Mendes de Jesus, R. Oset Sinha. and M. C. Romero Fuster, *Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to  $\mathbb{R}^3$* , Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 267, 205-216, (2009).
10. R. Oset Sinha, *Topological invariants of stable maps from 3-manifolds to three-space*, Proc. Liverpool Singularities-Sympos. Pg. 69 Valencia, (2009).
11. R. O. Sinha and M. C. Romero Fuster, *Graphs of stable maps from 3-manifolds to 3-space*. Mediterr. J. Math. 10, 1107-1126, (2013).
12. C. H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. 62, 374-410, (1955).

*Nelson Berrocal Huamaní,*  
*Departamento de Matemática y Física,*  
*Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga,*  
*Perú.*  
*E-mail address: nelson.berrocal@unsch.edu.pe*

*and*

*Catarina Mendes de Jesús Sánchez,*  
*Departamento de Matemática,*  
*Universidade Federal de Juiz de Fora,*  
*Brasil.*  
*E-mail address: cmendesjesus@gmail.com*