Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 34 2 (2016): 107–112.
©SPM –ISSN-2175-1188 on line ISSN-00378712 in press
SPM: www.spm.uem.br/bspm doi:10.5269/bspm.v34i2.27471

Sur la tour de Hilbert de certains corps

Abdelmalek Azizi, Mohammed Talbi and Mohamed Talbi

ABSTRACT: In this paper, we determine the first Hilbert 2-class field for some quartic cyclic number fields k and the Galois group of the second Hilbert 2-class field of k over k.

Key Words: Corps quartiques cycliques, Groupe de classes, Corps de classes de Hilbert.

Table des matières

1 Introduction **107**

2 Unités de certains corps de nombres **108**

3 Tour des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$ **109**

1. Introduction

Soit k un corps de nombres, $C_{\mathrm{k},2}$ son 2-groupe de classes, c'est le 2-sous-groupe de Sylow du groupe des classes (au sens large) de k, $\mathrm{k}^0 = \mathrm{k} \subseteq \mathrm{k}^1 \subseteq \mathrm{k}^2 \ldots \mathrm{k}^i \ldots$, la tour des 2-corps de classes de Hilbert de k ce qui veut dire que k^1 est le 2-corps de classes de Hilbert de k (c'est l'extension abélienne maximale non ramifié de k de degré une puissance de 2) et k^{i+1} est le 2-corps de classes de Hilbert de k^i pour $i \geq 1$.

Lemme 1.1. *Soit G un 2-groupe d'ordre 2^m avec $m \geq 2$ tel que $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors G est isomorphe à Q_m (respectivement D_m, S_m, $(2,\ 2)$) le groupe quatérnionique (respectivement diédral, semi-diédral, de Klein) d'ordre 2^m. En particulier G', le groupe dérivé de G est cyclique.*

Preuve: Voir [3]. □

Soit $G = Gal(\mathrm{k}^2/\mathrm{k})$, le groupe de Galois de k^2/k, par la théorie des corps de classes on sait que $G' = Gal(\mathrm{k}^2/\mathrm{k}^1) \simeq C_{\mathrm{k}^1,2}$ et $G/G' = Gal(\mathrm{k}^1/\mathrm{k}) \simeq C_{\mathrm{k},2}$. D'après [3] et [8], on a que si $C_{\mathrm{k},2}$ est un groupe élémentaire de rang 2, alors $C_{\mathrm{k}^1,2}$ est cyclique, ce qui donne que la tour des 2-corps de classes de Hilbert s'arrête en k^1 ou en k^2.

Définition 1.1 (Conditions de Taussky)**.** *Soient F une extension cyclique non ramifiée de* k *et j : l'application de C_{k} dans C_F qui fait correspondre à la classe d'un idéal I de* k*, la classe de l'idéal engendré par I dans F. Alors:*

2000 *Mathematics Subject Classification:* 11R27; 11R29; 11R37

- *L'extension* F/k *est dite de type* (A) *si et seulement si* $|\ker j \cap N_{F/\mathrm{k}}(C_F)| > 1$,
- *L'extension* F/k *est dite de type* (B) *si et seulement si* $|\ker j \cap N_{F/K}(C_F)| = 1$.

Théorème 1.1. *Soient* k *un corps de nombres tel que* $C_{\mathrm{k},2}$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, F_1, F_2, F_3 *les trois sous-corps intermédiaires de* k^1/k *et* G *le groupe de Galois de* k^2/k, *alors*

1. G *est abélien si et seulement si les quatre classes de* $C_{\mathrm{k},2}$ *capitulent dans chacune des extensions* F_i/k;
2. $G \simeq Q_3$ *si et seulement si les trois extensions* F_i/k *sont de type* (A) *et dans chacune des extensions* F_i/k *deux classes seulement de* $C_{\mathrm{k},2}$ *capitulent;*
3. $G \simeq Q_m$ *avec* $m > 3$ *si et seulement si une seule extension* F_i/k *est de type* (A) *et dans chacune des extensions* F_i/k *deux classes de* $C_{\mathrm{k},2}$ *capitulent;*
4. $G \simeq S_m$ *si et seulement si les trois extensions* F_i/k *sont de type* (B) *et dans chacune des extensions* F_i/k *deux classes de* $C_{\mathrm{k},2}$ *capitulent;*
5. $G \simeq D_m$ *si et seulement si les quatre classes de* $C_{\mathrm{k},2}$ *capitulent seulement dans l'une des extensions* F_i/k.

Preuve: Voir [8]. □

2. Unités de certains corps de nombres

Dans toute la suite de ce papier, soient p un nombre premier congru à 1 modulo 8, ε l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon\sqrt{p}})$.

L'extension $L/\mathbb{Q}$ est réelle cyclique de degré 4 de groupe de Galois $H = \langle\sigma\rangle$ et de sous-corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Puisque L est de conducteur p, alors $L \subset \mathbb{Q}^{(p)}$ et il existe un caractère χ' de $Gal(\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, dont le noyau est $Gal(\mathbb{Q}^{(p)}/L)$, qu'on appellera caractère de L.
Soit $\chi = \chi' + \chi'^{-1}$; alors χ est un caractère rationnel de $\mathbb{Q}^{(p)}$ et L est fixe par le noyau commun de χ' et χ'^{-1}. Soient E_L le groupe des unités de L, E_χ le groupe des unités χ-relatives de L, $|E_L|$ (resp. $|E_\chi|$) le groupe des valeurs absolues de E_L (resp. de E_χ), $|E^L| = |E_L| \oplus |E_\chi|$ et ε_χ un générateur de E_χ, alors, en utilisant les travaux de M. N. Gras [4], on a les deux résultats:

Théorème 2.1. *Soit* $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon\sqrt{p}})$ *où* p *est un nombre premier congru à* 1 *modulo* 8 *et* ε *l'unité fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, *alors il existe* ξ *dans* E_L, *tel que* $\xi^2 = \pm\varepsilon\varepsilon_\chi^{1-\sigma}$ *et* $\{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ *est un système fondamentale d'unités de* L.

Remarque 2.1. *Comme* $\xi^2 = \pm\varepsilon\varepsilon_\chi^{1-\sigma}$, *alors:*

1. $\xi^{1+\sigma} = \pm\varepsilon_\chi$;
2. $\xi^{1+\sigma^2} = \pm\varepsilon$;

3. $\xi^{1+\sigma+\sigma^2+\sigma^3} = \varepsilon_\chi^{1+\sigma^2} = \varepsilon^{1+\sigma}$;

4. $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = N_{L/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_\chi) = N_{L/\mathbb{Q}}(\xi) = -1$.

Lemme 2.1. *Avec les notations du théorème 2.1, $\{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ est aussi un système fondamentale d'unités du corps $F = L(\sqrt{-n})$ où n est un entier naturel premier à p et sans facteur carré.*

Preuve: (1) Si $L(\sqrt{-n}) \neq L(\sqrt{-1})$, alors, d'après [1, Proposition 3], pour montrer que $\{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ est un système fondamentale d'unités de F il suffit de montrer que $n\mu$ n'est pas un carré dans L, pour $\mu = {\xi'_1}^{j_1}{\xi'_2}^{j_2}\xi'_3$ où $\{\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3\} = \{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$.
En effet, si $\mu = \xi$, alors si $n\xi = x^2$ dans L, en calculant la norme dans L/k, on trouve que $\xi^{1+\sigma^2} = \pm\varepsilon$ est un carré dans k, ce qui est impossible.
Si $\mu = \xi^\sigma$, alors si $n\xi^\sigma = \pm n\frac{\varepsilon_\chi}{\xi} = x^2$ dans L, en calculant la norme dans L/k, on trouve que $\pm\frac{\varepsilon_1^{1+\sigma}}{\varepsilon} = \pm\frac{1}{\varepsilon}$ est un carré dans k, ce qui est absurde.
Si $\mu = \xi^{\sigma^2}$, alors si $n\xi^{\sigma^2} = \pm n\frac{\varepsilon_1}{\xi} = x^2$ dans L, en calculant la norme dans L/k, on trouve que $\pm\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1} = \pm\varepsilon_1$ est un carré dans k, ce qui n'est pas le cas.
Si $\mu = \xi^{1+\sigma} = \pm\varepsilon_\chi$, alors si $\pm n\varepsilon_\chi = x^2$ dans L, en calculant la norme dans L/k, on trouve que $\varepsilon_\chi^{1+\sigma^2} = \varepsilon_1^{1+\sigma} = -1$ est un carré dans k, ce qui est absurde.
Si $\mu = \xi^{1+\sigma^2} = \pm\varepsilon_1$, alors $\pm n\varepsilon_1$ ne peut être un carré dans L.
Si $\mu = \xi^{\sigma+\sigma^2}$, alors si $n\xi^{\sigma+\sigma^2} = x^2$ dans L, en calculant la norme dans L/k, on trouve que $\xi^{1+\sigma+\sigma^2+\sigma^3} = -1$ est un carré dans k, ce qui n'est pas le cas.
Si $\mu = \xi^{1+\sigma+\sigma^2}$, alors si $n\xi^{1+\sigma+\sigma^2} = x^2$ dans L, en calculant la norme dans L/k, on trouve que $\xi^{1+\sigma+\sigma^2+\sigma^3}\xi^{1+\sigma^2} = \pm\varepsilon_1$ est un carré dans k, ce qui est impossible.
(2) Si $L(\sqrt{-n}) = L(\sqrt{-1})$, alors, on a $m = 2$ est le plus grand entier tel que $\zeta_m \in F$, ainsi, d'après [1, Proposition 2], pour montrer que $\{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ est un système fondamentale d'unités de F il suffit de montrer que 2μ n'est pas un carré dans L, pour $\mu = {\xi'_1}^{j_1}{\xi'_2}^{j_2}\xi'_3$ où $\{\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3\} = \{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. En utilisant le même raisonnement que dans (1) on trouve le résultat, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

3. Tour des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$

Soient $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$ où p est un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 8$ et $(\frac{2}{p})_4 = -1$, d'après [2], $C_{\mathrm{k},2}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ainsi k^1/k a trois sous-corps intermédiaires, qu'on note par F_1, F_2, F_3 et soit G le groupe de Galois de k^2/k. En utilisant [6, Théorème 4, p. 48–49], on montre facilement que le corps de genres de k est $\mathrm{k}^{(*)} = F_3 = \mathrm{k}(\sqrt{-1})$, c'est la plus grande extension de k de la forme $\mathrm{k}M$ qui est non ramifiée pour tous les idéaux premiers de k, finis et infinis, et telle que M est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$.

Comme $(\frac{2}{p}) = 1$, alors ils existent deux idéaux premiers

$$\mathcal{B}_1 = \langle 2, \frac{x+y\sqrt{p}}{2}\rangle \text{ et } \mathcal{B}_2 = \langle 2, \frac{x-y\sqrt{p}}{2}\rangle \text{ de } \mathbb{Q}(\sqrt{p}) \text{ tel que } (2) = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \text{ dans } \mathbb{Q}(\sqrt{p}),$$

avec x et y des entiers, or $\mathcal{B}_1^{h_0}$ et $\mathcal{B}_2^{h_0}$ sont des idéaux principaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ où h_0 est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, donc on peut choisir a et b strictement positifs tels que

$$\mathcal{B}_1^{h_0} = \left(\frac{a+b\sqrt{p}}{2}\right) \text{ et } \mathcal{B}_2^{h_0} = \left(\frac{a-b\sqrt{p}}{2}\right) \text{ dans } \mathbb{Q}(\sqrt{p}),$$

avec $\alpha = \frac{a+b\sqrt{p}}{2}$ et $\bar{\alpha} = \frac{a-b\sqrt{p}}{2}$ sont strictement positifs. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ les idéaux premiers de k au dessus de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$.

Théorème 3.1. *Soient* $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$ *où p est un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \bmod 8$ *et* $(\frac{2}{p})_4 = -1$, *et* $F_3 = \mathrm{k}(\sqrt{-1})$, *alors* $C_{F_3,2}$ *est cyclique d'ordre* $h_2(F_3) = h_2(-p)$, *où* $h_2(-p)$ *est le* 2*-nombre de classes de* $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$.

Preuve: On a F_3 est un CM-corps et L est son sous-corps réel maximal, et comme le nombre de classes de L est impair (voir [11]), alors, d'après [10],

$$rang\ C_{F_3,2} = t - 1 + rang\ E_L \cap N_{F_3/L}(F_3)/{E_L}^2,$$

où t est le nombre des idéaux premiers (finis) ramifiés dans F_3/L.
En utilisant les notations du lemme 2.1, on a $\{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$ est un système fondamentale d'unités de L et de F_3 et on a

$$N_{F_3/L}(\xi) = N_{F_3/L}(\xi^{\sigma^2}) = \pm\varepsilon \text{ et } N_{F_3/L}(\xi^\sigma) = \pm\varepsilon^{-1},$$

ainsi

$$rang\ E_L \cap N_{F_3/L}(F_3)/{E_L}^2 = 0.$$

Comme on a deux idéaux premiers de L qui se ramifient dans F_3 qui sont les idéaux premiers de L au dessus des deux diviseurs premiers de 2 dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, alors on a $rang\ C_{F_3,2} = 1$, ce qui veut dire que C_{2,F_3} est cyclique.

On a $F_3/\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$ et de sous extensions quadratiques k, L, $\mathrm{k}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{-1})$ et d'indice d'unité $q(F_3/\mathbb{Q}(\sqrt{p}))$, ainsi, d'après [9], on a

$$h_2(F_3) = \frac{2^{2-1-2-0}q(F_3/\mathbb{Q}(\sqrt{p}))h_2(\mathrm{k})h_2(L)h_2(\mathrm{k}_0)}{h_2(\mathbb{Q}(\sqrt{p}))^2}.$$

Or on a $h_2(\mathbb{Q}(\sqrt{p})) = 1$, $h_2(\mathrm{k}) = 4$, $h_2(L) = 1$ (voir [11]), et comme $\mathrm{k}_0/\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ est cyclique (voir [7]), alors $h_2(\mathrm{k}_0) = \frac{1}{2}h_2(-p)$ et on a $\{\varepsilon\}$ est un système fondamentale d'unités de k et comme 2ε n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, alors, d'après [1, Proposition 2], $\{\varepsilon\}$ est aussi un système fondamentale d'unités de k_0. D'après le lemme 2.1, L et F_3 ont même système fondamentale d'unités qui est le système $\{\xi, \xi^\sigma, \xi^{\sigma^2}\}$, ainsi $q(F_3/\mathbb{Q}(\sqrt{p})) = 1$, ce qui donne que $h_2(F_3) = h_2(-p)$. $\square$

Corollaire 3.1.1. *Soient* $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$ *où* p *est un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \bmod 8$ *et* $(\frac{2}{p})_4 = -1$*, et* $G = Gal(\mathrm{k}^2/\mathrm{k})$ *le groupe de Galois de* k^2/k*. Alors*

$$|G| = 2h_2(-p),$$

où $h_2(-p)$ *est le* 2*-nombre de classes de* $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$*.*

Théorème 3.2. *Soient* $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$ *où* p *est un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \bmod 8$ *et* $(\frac{2}{p})_4 = -1$*. Alors dans chacune des extensions* F_i *ils existent exactement deux classes de* $C_{\mathrm{k},2}$ *qui capitulent et* G*, le groupe de Galois de* k^2/k *est quaténionique.*

Preuve: Le groupe G ne peut être abélien car, d'après [7], 4 divise $h_2(-p)$ ce qui donne $|G| \geq 8$. D'après le lemme 2.1, on a $\{\xi, \xi^{\sigma}, \xi^{\sigma^2}\}$ est un système fondamentale d'unités de F_3 et on a $N_{F_3/\mathrm{k}}(\xi) = N_{F_3/\mathrm{k}}(\xi^{\sigma^2}) = \pm\varepsilon$ et $N_{F_3/\mathrm{k}}(\xi^{\sigma}) = \pm\varepsilon^{-1}$, ainsi, en utilisant [5], on trouve que deux classes seulement de $C_{\mathrm{k},2}$ capitulent dans F_3, et comme on a le 2-groupe de classes F_3 est cyclique, alors G est quaténionique et dans chacune des extensions F_i ils existent exactement deux classes de $C_{\mathrm{k},2}$ qui capitulent. □

Lemme 3.1. *Soient* p *un nombre premier congru à* 1 *modulo* 8 *et* ε *l'unité fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$*, alors* $\varepsilon\sqrt{p} \equiv 1 \bmod 4$ *dans* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$*.*

Preuve: Soit $\varepsilon = u + v\sqrt{p}$, comme $p \equiv 1 \bmod 8$, alors u est pair et v est impair. Montrons que $v \equiv 1 \bmod 4$ et $u \equiv 0 \bmod 4$, en effet, on a

$$v^2 = \frac{u^2+1}{p} \text{ et } p \equiv 1 \bmod 4,$$

donc $v^2 = x^2 + y^2$ pour x et y deux entiers relativement premiers, ce qui donne que

$$v^2 = (x+yi)(x-yi) \text{ dans } \mathbb{Z}[i],$$

ainsi

$$x + yi = \eta(e+fi)^2 \text{ où } e,\ f \in \mathbb{Z} \text{ et } \eta \in \{\pm 1,\ \pm i\} \text{ est une unité dans } \mathbb{Z}[i].$$

Puisque $v^2 = (e+fi)^2(e-fi)^2 = (e^2+f^2)^2$ et $v > 0$, alors $v = e^2 + f^2$, et comme v est impair, alors $v \equiv 1 \bmod 4$. En utilisant le fait que $u^2 = -1 + pv^2$, on trouve que $u \equiv 0 \bmod 4$. Ainsi $\varepsilon\sqrt{p} \equiv vp \equiv 1 \bmod 4$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. □

Corollaire 3.2.1. *Soient* $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon\sqrt{p}})$ *où* p *est un nombre premier tel que* $p \equiv 1 \bmod 8$ *et* $(\frac{2}{p})_4 = -1$*, alors* $\mathrm{k}^1 = \mathrm{k}(\sqrt{\varepsilon},\ \sqrt{-1})$ *de sous-corps* $F_1 = \mathrm{k}(\sqrt{\varepsilon})$*,* $F_2 = \mathrm{k}(\sqrt{\bar{\varepsilon}})$ *et* $F_3 = \mathrm{k}(\sqrt{-1})$ *sur* k *où* $\bar{\varepsilon}$ *est le conjugué de* ε*.*

Example 3.1. *Soit* $\mathrm{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{17+4\sqrt{17}})$*, on a* $17 \equiv 1 \bmod 8$*,* $(\frac{2}{17})_4 = -1$ *et* $h_2(-17) = 4$*, alors le groupe de Galois de* k^2/k *est quaténionique d'ordre* 8*, ils existent exactement deux classes de* $C_{\mathrm{k},2}$ *qui capitulent dans* $F_1 = \mathrm{k}(\sqrt{4+\sqrt{17}})$*, de même pour* $F_2 = \mathrm{k}(\sqrt{4-\sqrt{17}})$ *et* $F_3 = \mathrm{k}(\sqrt{-1})$ *et* $\mathrm{k}^1 = \mathrm{k}(\sqrt{4+\sqrt{17}},\ \sqrt{-1})$*.*

Références

1. A. Azizi, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur* $\mathbb{Q}$, Ann. Sci. Math. Québec, **23** (2), 15–21, (1999).

2. E. Brown and C. J. Parry, *The* 2*-class group of certain biquadratic number fields II*, Pacific Journal of Mathematics, **78** (1), 11–26, (1978).

3. D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, (1968).

4. M. N. Gras, *Table numérique du nombre de classes et des unités des extensions cycliques réelles de degré* 4 *de* $\mathbb{Q}$, Publ. Math. Fac. Sciences de Besançon, Théorie des Nombres, **2**, 1–79, (1977–78).

5. F. P. Heider and B. Schmithals, *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math., **366**, 1–25, (1982).

6. M. Ishida, *The genus fields of algebraic number fields*, Lecture notes in mathematics, **555**, Springer-Verlag, London, (1976).

7. P. Kaplan, *Divisibilité par* 8 *du nombre des classes des corps quadratiques dont le* 2*-groupe des classes est cyclique, et réciprocité biquadratique*, J. Math. Soc. Japan, **25** (4), 596–608, (1973).

8. H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to* 4 *modulo* 8 *and Hilbert's theorem* 94, J. Number Theory, **8** (3), 271–279, (1976).

9. F. Lemmermeyer, *Kuroda's class number formula*, Acta Arithmetica, **66** (3), 245–260, (1994).

10. F. Lemmermeyer, *On* 2*-class field towers of imaginary quadratic number fields*, J. de Théorie des Nombres de Bordeaux, **6** (2), 261–272, (1994).

11. L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields (Book 83)*, Graduate texts in mathematics, Springer–Verlag, New York, second edition, (1997).

Abdelmalek Azizi, Mohammed Talbi and Mohamed Talbi,
Département de Mathématiques et Informatique,
Faculté des Sciences,
Université Mohammed Premier,
Oujda, Maroc.
abdelmalekazizi@yahoo.fr
talbimm@yahoo.fr
ksirat1971@yahoo.fr