



Geração de padrões de corte n -grupos para a indústria moveleira *

Ana Paula Faccio e Socorro Rangel

ABSTRACT: Neste artigo são apresentadas propostas de soluções para o problema de geração de padrões de corte n -grupos para o corte da matéria-prima na indústria moveleira. Este problema NP-difícil aparece em diversos outros processos industriais que incluem o corte de painéis retangulares grandes de tamanho padrão em retângulos menores. O planejamento dos cortes é um aspecto importante do planejamento da produção nestas indústrias, pois efeitos negativos tais como o perda de matéria-prima e tempo de preparo da máquina de corte podem ser minimizados, diminuindo assim os custos de produção. É estudada a eficiência de modelos lineares inteiros para resolver o problema do corte guilhotinado bidimensional propostos em [33,34], bem como o seu uso na geração de colunas para o problema de corte de estoque. São usados dados reais de uma fábrica de móveis de pequeno porte característica do pólo moveleiro de Votuporanga/SP. Os resultados obtidos indicam que as estratégias propostas geram perdas dentro dos requisitos exigidos pela fábrica.

Key Words: Corte e empacotamento, corte de estoque bidimensional, cortes guilhotinados, padrões de cortes n -grupos, geração de colunas, indústria moveleira.

Contents

1	Introdução	41
2	Revisão bibliográfica	44
3	O problema de corte de estoque bidimensional	45
4	Modelos matemáticos para a geração de padrões de corte	46
5	Estudo computacional	49

1. Introdução

A industrialização dos móveis brasileiros teve suas origens em 1875. Nesta época a produção de móveis era realizada em pequenas oficinas de produção artesanal [30], caracterizadas por ter uma estrutura familiar. A partir de 1936, houve um desenvolvimento significativo das empresas moveleiras no Brasil, porém, somente a partir da década de 1950 é que se consolidaram os principais pólos moveleiros, organizados nas regiões de Bento Gonçalves (RS), São Bento do Sul (SC), Araçongas (PR), Ubá (MG), Grande São Paulo, Mirassol e Votuporanga (SP). O setor moveleiro no Brasil é predominantemente composto por micro e pequenas empresas e é formado por mais de 16.104 fábricas, que juntas empregam aproximadamente 206.352

* Parcialmente financiado por CNPq and FAPESP
2000 *Mathematics Subject Classification*: 90C90, 90C11

trabalhadores [1]. Destes estabelecimentos, 83% estão localizados nas regiões Sul e Sudeste, com 86% dos empregados. São produzindo todos os tipos de móveis, sendo que 60% referem-se a móveis residenciais, 25% a móveis de escritório e 15% a outros tipos de móveis (*e.g.* institucionais, escolares).

Para nossos estudos, tomamos por base uma fábrica de pequeno porte (Fábrica V), característica do pólo moveleiro de Votuporaga, noroeste do estado de São Paulo. Nesta fábrica os móveis fabricados são essencialmente residenciais, na maioria de dormitório, e a matéria-prima principal são painéis retangulares de madeira (*e.g.* *MDF - Medium Density Fiberboard*). A linha de produção da Fábrica V e das outras fábricas de móveis residenciais de pequeno e médio porte de Votuporanga segue, em geral, o esquema apresentado na Figura 1 [28,6]. Inicialmente os

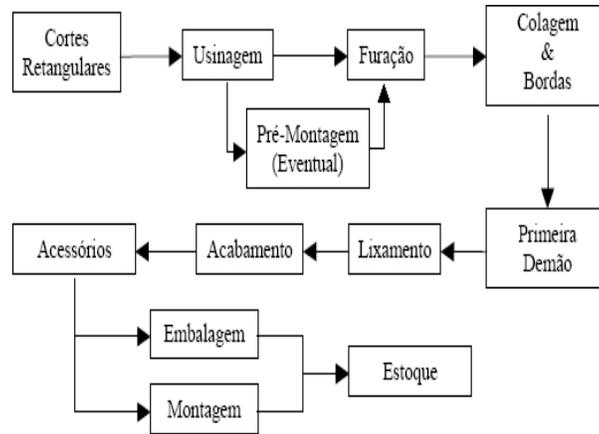


Figure 1: Linha de produção da Fábrica de Móveis V [6].

objetos passam pelo setor de corte retangulares (primário e secundário). O setor de corte primário possui uma máquina seccionadora semi-automática na qual os objetos são cortados em retângulos menores. Se necessário, os itens são enviados para o setor de corte secundário onde existem máquinas de corte menores que podem ser utilizadas no aparo das perdas, e no corte de itens que foram agrupados. Os itens são então encaminhados para o setor de usinagem, que é responsável pelos processos que darão outros tipos de formatos (não-retangulares) aos itens por meio de serras e ferramentas específicas, de acordo com o design do produto. Nesta etapa são realizadas também operações de furações, frezza (acabamento para tirar as irregularidades provenientes da usinagem), e a colagem ou colocação de bordas. Após estas operações, alguns itens são agrupados e encaminhados para o setor de montagem. Nesse setor, algumas peças são pré-montadas e preparadas para a pintura. O setor de pintura é formado por um conjunto de máquinas que operam interligadas. Antes de ser usado, esse conjunto necessita de um preparo que envolve a limpeza das máquinas e a carga das tintas. Depois da pintura, os itens e

as peças pré-montadas são enviados para a colocação de acessórios (e.g. puxadores de portas e gavetas, fechaduras), agrupados e armazenados em caixas específicas (alguns produtos são armazenados montados).

O foco deste trabalho é no setor de corte primário, em especial na máquina seccionadora (máquina de corte). É nela que são feitos os primeiros e principais cortes na matéria-prima. Além disto, esta máquina é considerada pela empresa um “gargalo” na produção. O sucesso no corte da matéria-prima está fortemente ligado ao modo como os cortes são executados.

A forma geométrica como os itens são arranjados em um objeto é chamada de padrão de corte. Um padrão de corte é dito homogêneo se contém apenas um tipo de item. Diversos fatores devem ser considerados na elaboração de um padrão de corte. Por limitação operacional da maioria dos equipamentos de corte encontrados na indústria de móveis, um padrão de corte é viável se for guilhotinado. Um corte feito de uma extremidade a outra de um retângulo, dividindo-o em retângulos menores é denominado corte guilhotinado ortogonal, ou simplesmente corte guilhotinado. Outro fator importante a ser considerado na geração de um padrão de corte é o número de vezes que o objeto deve ser rotacionado em 90° de forma a permitir que os cortes guilhotinados sejam realizados (número de estágios). De maneira geral, o número de estágios k é dado por $k = r + 1$, sendo r o número de rotações necessárias. Se ao término do último estágio, todos os itens tiverem sido obtidos, o padrão de corte é dito exato, se for necessário um corte adicional (apara) o padrão é não-exato [3]. É fácil perceber que a cada rotação do objeto o tempo de produção é penalizado, o que justifica a preferência da Fábrica V por padrões em dois estágios. Porém, esporadicamente a fábrica também aceita padrões de corte em três estágios, quando estes reduzem consideravelmente a perda. Os padrões de corte n -grupos são padrões em dois estágios tais que as faixas resultantes do primeiro estágio são separadas em n grupos de modo que todas as faixas de um mesmo grupo podem ser cortadas simultaneamente no segundo estágio.

A Figura 2 ilustra a sequência de cortes que os operadores da máquina executam no corte de um objeto de acordo com um padrão de corte 2 estágios. O primeiro corte é feito no sentido horizontal para a obtenção da faixa 1. Esta faixa é rotacionada e o segundo corte é usado para a obtenção do item 1. O terceiro corte é usado para cortar simultaneamente a faixa 1 (e assim obter o item 2) e o restante do objeto para obter a faixa 2. De forma análoga, acontecem o quinto, sétimo e nono corte. Os itens de número três algumas vezes não são cortados no setor primário. Estes itens são considerados pequenos pela fábrica, portanto são agrupados para o corte no setor primário e separados no setor de cortes secundário. O nono corte foi usado para obter o item 3, a partir do corte da faixa 4 rotacionada, e para a aparta dos item 3 e 4 incluídos na faixa 5. Se esta aparta tivesse dimensões menores, este corte seria feito também no setor secundário. Maiores detalhes sobre o processo de produção da Fábrica V podem ser obtidos por exemplo em [16,28,26,31].

O presente trabalho tem como objetivo avaliar a eficiência dos modelos n -grupos verticais propostos em [34] para gerar padrões de corte bidimensionais para o problema de corte de estoque bidimensional. Na Seção 2 é feita uma breve revisão bibliográfica de trabalhos que envolvem a geração de padrões de corte, o problema

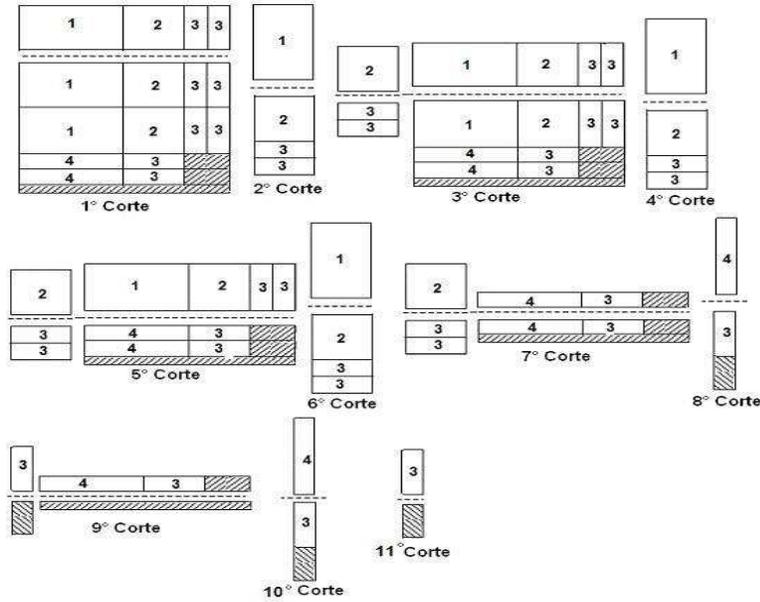


Figure 2: Sequência de cortes em um padrão de corte 2-estágios.

de corte de estoque e indústrias do setor moveleiro. Na Seção 3 apresentamos as principais definições relacionadas ao problema de corte de estoque bidimensional e o método de geração de colunas utilizada para resolver o problema. Os modelos n -grupos propostos por [34] são brevemente descritos na Seção 4. Na Seção 5 são apresentados resultados computacionais usando dados reais da Fábrica V. Finalmente, apresentamos as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

2. Revisão bibliográfica

Diversos trabalhos na literatura apresentam modelos matemáticos e procedimentos para gerar padrões de corte bidimensionais guilhotinados k -estágios. Gilmore e Gomory [14] e Beasley [4] apresentam formulações baseadas em programação dinâmica para o caso irrestrito (o termo "irrestrito" é usado para designar que não há limitação sobre o número de itens num padrão de corte e "restrito" caso contrário) e, posteriormente, Christofides e Hadjiconstantinou [8] as estenderam para o caso restrito. Morabito e Arenales [22] apresentam um algoritmo de enumeração implícita, baseado numa busca em grafo E/OU, para o problema estagiado e para o caso restrito. Em [29] é estudado um problema bidimensional com cortes guilhotinados em 2-estágios e com grande variação na demanda (alguns itens com demanda alta, enquanto outros com demanda baixa). Lodi e Monaci [19] apresentam dois

modelos lineares para a geração de padrões de corte guilhotinado 2-estágios e consideram algumas restrições para evitar soluções simétricas. Morabito e Arenales [23] apresentam um modelo quadrático inteiro para gerar padrões de corte 1-grupo (tabuleiros) e detalham uma heurística para obtenção destes padrões. Katsurayama e Yanasse [18] propõem um algoritmo para gerar padrões de corte tabuleiros exatos que contenham uma combinação de itens previamente determinada.

Estudos relacionados ao problema de corte e empacotamento em indústrias moveleiras podem ser encontrados em [28,26,24]. Em Figueiredo e Rangel [28] foi proposta uma heurística para gerar padrões n -grupos, denominados padrões tabuleiros compostos. Resultados computacionais com dados da mesma indústria de móveis estudada no presente trabalho, mostraram que a utilização de padrões tabuleiros compostos resulta em índices de perda melhores do que os índices que vinham sendo obtidos pela indústria. Rangel e Mosquera [26] propõem métodos de solução para a resolução do problema de corte de estoque considerando, além da redução do número de objetos cortados, a redução do número de ciclos da serra, aproveitando assim a capacidade da serra de cortar vários objetos simultaneamente. Morabito e Belluzzo [24] apresentam abordagens para gerar padrões de corte bidimensionais que minimizam os desperdícios de matéria-prima considerando equipamentos de corte automatizados.

Formulação matemática de modelos para gerar padrões 2-estágios n -grupos ($n \geq 1$) são discutidas em [33,34]. Outros estudos relacionados a geração de padrões de corte bidimensional e à indústria moveleira podem ser encontrados em [14,17,35,5,20,25,23,21,9].

3. O problema de corte de estoque bidimensional

Para definir o problema de corte de estoque bidimensional considere que existe em estoque objetos de dimensões (L, W) , e um pedido de m itens de dimensões (l_i, w_i) e demanda b_i , ($i = 1, \dots, m$). O problema consiste em produzir os itens a partir do corte dos objetos de modo a atender a demanda, otimizando uma determinada função, por exemplo, minimizando o número total de objetos a serem cortados ou minimizando a perda. Representando os padrões de corte através de um vetor m -dimensional cujas coordenadas representam o número de itens no padrão, e supondo conhecidos n padrões de corte, o problema de corte de estoque pode ser formulado matematicamente como [12]:

$$\text{Min } c^T x \quad (1)$$

$$\text{s.a.: } Ax \geq b \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n; \quad (3)$$

em que, $c \in \mathbb{R}_+^n$ é o vetor custo dos objetos, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz cujas colunas representam os padrões de corte e x_j é o número de objetos cortados de acordo com o padrão de corte j ($j = 1, \dots, n$). A função objetivo (1) minimiza o custo total, as restrições (2) garantem que as demandas dos itens sejam atendidas e que

pode haver excesso de produção de itens. As restrições (3) definem o domínio das variáveis de decisão.

Uma das dificuldades encontradas na solução deste problema é o número alto de padrões de corte ($m \ll n$). Este problema pode ser contornado usando o método de geração de colunas, proposto em [12,13]). Este método consiste em resolver o problema (1)-(3) relaxado (restrição (3) é substituída por $x \in \mathbb{R}_+^n$) pelo método simplex utilizando um processo de geração de colunas [7]. Ou seja, a cada iteração do método simplex é gerada uma coluna a_j (padrão de corte). Inicia-se a resolução do problema mestre com um conjunto de m padrões de corte homogêneos. A cada iteração do método simplex, um dos padrões do problema mestre atual é substituído pelo novo padrão de corte, se este melhorar a solução básica atual. Este padrão de corte é determinado resolvendo-se o seguinte subproblema:

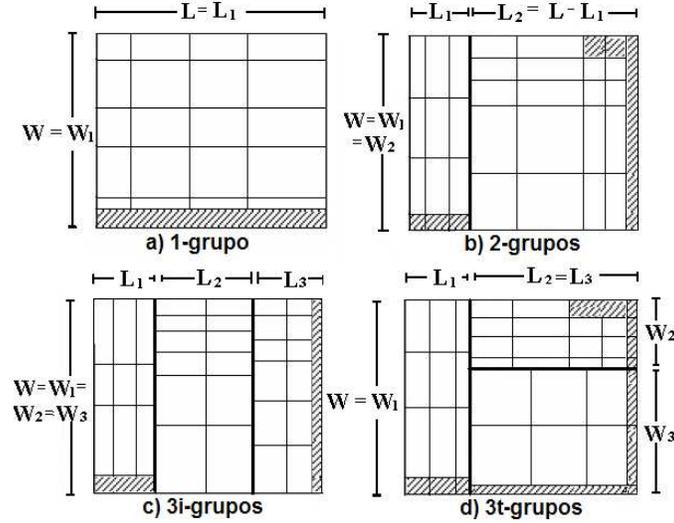
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \pi^T y \\ \text{s.a.:} \quad & y \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, (a_j, j = 1 \dots n \text{ é um padrão de corte bidimensional}) \end{aligned}$$

em que π é o vetor de variáveis duais (ou multiplicador simplex). Depois de resolvido o problema de corte de estoque relaxado, uma solução inteira para o problema original pode ser obtida por arredondamento ou pelo método *Branch and Price* [32]. O método de geração de coluna é conhecido pela sua convergência lenta para a solução ótima do problema relaxado. Nas primeiras iterações o valor da função objetivo decresce rapidamente, mas a medida que a solução se aproxima da ótima, este decréscimo é cada vez menor. Este comportamento é típico da geração de colunas e é conhecido como *tailing off* [11].

4. Modelos matemáticos para a geração de padrões de corte

Yanasse e Morabito [34] apresentam modelos matemáticos para gerar padrões de corte 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos vertical, considerando os casos exato e não-exato. A Figura 3 ilustra estes quatro tipos de padrões de corte n -grupos. Observe que cada um dos grupos que compõem o padrão de corte é separado por um corte vertical principal, que divide o objeto em subobjetos (exceto naturalmente o padrão 1-grupo). Por exemplo, em um padrão de corte 2-grupos vertical (vide Figura 3 b)) após efetuado o corte principal na posição vertical do objeto, L_1 , obtemos dois subobjetos (L_1, W) e $(L_2 = L - L_1, W)$. Em cada um destes subobjeto há um padrão de corte 1-grupo (Figura 3 a)). Esta idéia pode ser usada para gerar padrões de corte 3-grupos (*e.g.* 3i-grupos - Figura 3 c) e 3t-grupos - Figura 3 d)). A notação 3i-grupos é utilizada devido aos cortes feitos no objeto serem do tipo “i”, ou seja, ou os cortes principais são na vertical ou na horizontal do objeto. O padrão 3t-grupos vertical, é um padrão do tipo “T” (cortes principais semelhantes a um “T”), tal que o primeiro corte principal é feito na vertical e o segundo na horizontal do objeto.

A preocupação com a escolha do melhor padrão de corte, se deve ao fato que a matéria-prima representa para a empresa em torno de 54% do custo total de produção de um móvel. Além disso, existe interesse na definição de padrões de corte que permite uma melhor taxa de utilização da máquina. Os padrões n -grupos

Figure 3: Padrões de corte n -grupos.

permitem um bom aproveitamento do objeto e uma maior eficiência no processo de corte, já que as faixas obtidas no primeiro estágio do corte podem ser agrupadas para o corte no segundo estágio, reduzindo assim o número de ajustes da máquina.

Para apresentar os modelos matemáticos propostos por Yanasse e Morabito [34] vamos supor conhecidos:

m - número de itens;

L, W - comprimento e largura do objeto respectivamente;

l_i, w_i - comprimento e largura do item i ($i = 1, \dots, m$) respectivamente;

b_i - demanda do item i ($i = 1, \dots, m$)

v_{ijk} - valor do item i incluído em um retângulo (l_j, w_k) ($j = 1, \dots, J$ e $k = 1, \dots, K$);

J, K - quantidade de comprimentos l_i e larguras w_i diferentes;

s_j - número de dígitos necessários para representar $\frac{L}{l_j}$ na notação binária;

M - número real suficientemente grande.

As variáveis de decisão do modelo são:

β_{jsh} - o dígito binário (0,1) associado a decomposição do número de vezes que o comprimento l_j é cortado ao longo do subobjeto h ;

μ_{kh} - número de vezes que a largura w_k é cortada ao longo da largura do subobjeto h ;

a_{ijkh} - número de retângulos (l_j, w_k) que contém itens do tipo i no subobjeto h ;

$f_{jks h}$ - número de retângulos (l_j, w_k) no subobjeto h ;

L_h - comprimento do subobjeto h ;

W_h - largura do subobjeto h .

Padrões de corte 1-grupo podem ser obtidos tomando $h = 1$ no modelo de otimização (4)-(12).

$$Max \sum_{h=1}^1 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijkh} \quad (4)$$

$$s.a.: \sum_{j=1}^J l_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{jsh} \leq L_h, \forall h \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_{kh} \leq W_h, \forall h \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijkh} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks}, \forall j, k, h \quad (7)$$

$$f_{jks} \leq \mu_{kh}, \forall j, k, s, h \quad (8)$$

$$f_{jks} \geq \mu_{kh} - M(1 - \beta_{jsh}), \forall j, k, s, h \quad (9)$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{jsh}, \forall j, k, s, h \quad (10)$$

$$\sum_{h=1}^1 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijkh} \leq b_i, \forall i \quad (11)$$

$$\beta_{jsh} \in \{0, 1\}; \mu_{kh}, a_{ijkh} \in \mathbb{Z}_+, \quad (11)$$

$$f_{jks} \geq 0; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, J; \quad (12)$$

$$k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1.$$

A função objetivo (4) maximiza o valor total dos itens incluídos no padrão de corte; as restrições (5) e (6) impõem que o comprimento e a largura dos retângulos que irão conter os itens não excedam o comprimento e largura do subobjeto h , respectivamente; as restrições (7)-(10) limitam o número de retângulos (l_j, w_k) presentes no subobjeto h . As restrições (11) garantem a geração de um padrão de corte restrito (isto é, há limitação sobre o número máximo de itens do tipo i no padrão de corte). As restrições (12) definem o domínio das variáveis.

O modelo (4)-(12) pode ser usado para gerar um padrão de corte exato ou não-exato. Para o caso exato, basta substituir o valor de (v_{ijk}) por:

$$\begin{cases} v_i, & \text{se } l_i = l_j \text{ e } w_i = w_k; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e para obter um padrão de corte não-exato:

$$\begin{cases} v_i, & \text{se } l_i \leq l_j \text{ e } w_i \leq w_k; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde v_i é o valor do item i .

O modelo linear inteiro (4)-(12) também pode ser usado para gerar padrões de corte 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos vertical. Basta variar o valor de h que controla o número de subobjetos a serem criados e incluir restrições que limitam os cortes principais (verticais ou horizontais) no objeto. Restrições que evitam a duplicação de corte devido ao efeito simetria também são incluídas no modelo. A Tabela 1, resume as modificações a serem feitas. A primeira coluna se refere ao modelo a ser criado, a segunda define o valor de h associado e a terceira coluna descreve as restrições a serem incluídas. Assim para obter, por exemplo o modelo 3i-grupos, basta alterar no modelo (4)-(12) o valor do índice h para $h = 1, 2, 3$, e adicionar as restrições $0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2}$, $L_2 \leq L - L_1 - L_2$ e $L_3 = L - L_1 - L_2$.

Table 1: Alterações no modelo 1-grupo para obtenção dos modelos 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupo

Alterações no Modelo 1-grupo		
Modelo	N. Subobj	Rest Adicionadas
2-grupos	$h = 1, 2$	$0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2}$ $L_2 = L - L_1$
3i-grupos	$h = 1, 2, 3$	$0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2}$ $L_2 \leq L - L_1 - L_2$ $L_3 = L - L_1 - L_2$
3t-grupos	$h = 1, 2, 3$	$W_1 = W$ $0 \leq W_2 \leq \frac{W_1}{2}$ $W_3 = W_1 - W_2$ $L_2 = L - L_1$ $L_2 = L_3$

5. Estudo computacional

Nesta seção são apresentados os resultados do estudo computacional realizado para analisar o desempenho dos modelos de otimização apresentados na Seção 4 para a geração de padrões de corte bidimensionais. O estudo foi realizado em duas etapas: a primeira direcionada a comparar os modelos para resolver o problema de corte bidimensional (isto é, gerar um único padrão de corte) e a segunda para analisar a eficiência dos modelos na solução do subproblema de geração de colunas para o problema de corte de estoque bidimensional.

Os testes foram realizados em um computador ADM Athlon (2.81GHz) com 1,87 Gb de memória RAM. O *software* utilizado foi o Xpress^{MP} [10], sob a plataforma Windows. Os modelos de otimização e o método de geração de colunas foram escritos na sintaxe da linguagem de modelagem XPRESS-Mosel. Os problemas de

otimização foram resolvidos pelo XPRESS-*Optimizer*, que tem como método *default* para resolver problemas de otimização inteira mista, o Método *Branch-and-Cut*.

Os exemplares utilizados nos testes foram baseados nos dados gentilmente cedidos pela Fábrica V e se referem a três produtos: P1, P2 e P3. As características destes produtos (tipo de lote, tamanho do lote e espessura dos objetos utilizadas) são descritas na Tabela 2. Para todas as espessuras, a dimensão do objeto considerada foi $(L, W) = (2750mm, 1830mm)$ e o desgaste da serra foi igual a $\delta = 4mm$. Note que para obter todos os itens associados a um determinado produto, é necessário resolver um problema de corte de estoque para cada espessura do objeto. Por exemplo, para obter todos os itens associados à produção de um lote simples de P1 (produção de uma quantidade fixa de apenas um tipo de produto) é preciso resolver seis problemas de corte de estoque. No caso de lotes duplos (lotes derivados da junção de dois lotes simples), os itens de mesma espessura são agrupados. Assim, nas tabelas de resultados, os exemplares de lote simples (vide Tabela 3) foram nomeados de acordo com: Produto-Espessura. Por exemplo, o exemplar P1-25 contém os itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 25mm para a produção de P1. E os exemplares associados aos lotes duplos (vide Tabela 4) por: Produto1_Produto2-Espessura. Por exemplo, o exemplar P1_P2-15 contém os itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 15mm de espessura para a produção de P1 e P2.

Table 2: Conjunto de exemplares da fábrica

Produto	Tipo lote	T lote(un)	Esp do obj(mm)
P1	Simples	40	3, 9, 12, 15, 20 e 25
P2	Simples	160	3, 9, 12 e 15
P3	Simples	300	3, 12 e 15
P1_P2	Duplo	40 + 160	3, 9, 12, 15, 20 e 25
P1_P3	Duplo	40 + 300	3, 9, 12, 15, 20 e 25
P2_P3	Duplo	160 + 300	3, 9, 12 e 15

Nas Tabelas 3 e 4 são exibidos resultados da resolução de exemplares dos modelos n -grupos verticais para o caso exato e não-exato, considerando lotes simples e duplos respectivamente. Para cada exemplar e modelo, é exibido a área de utilização do objeto em porcentagem (Sol(%)) e o tempo de processamento em segundos (Tempo(s)) para o caso exato e não exato. São apresentados a média e o desvio padrão (DP) dos resultados. Neste teste, o valor de cada item é igual à sua respectiva área ($v_i = l_i w_i$). O tempo máximo de execução do *solver* foi limitado a uma hora (3600 segundos). Nem sempre é possível interromper o Xpress^{MP} no momento exato em que o contador de tempo atinge o limite máximo de tempo (informado através do comando *MAXTIME*). Por isso em para alguns exemplares o tempo máximo informado nas tabelas é superior a uma hora. Consideramos os valores

dos itens igual suas respectivas áreas ($v_i = l_i w_i$) e a orientação dos itens é fixa.

Table 3: Modelos n -grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato do lote simples.

Exemplar Produto - esp (n^0 itens)	MODELO 1-GRUPO				MODELO 2-GRUPOS			
	Exato		Não Exato		Exato		Não Exato	
	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)
P1-03 (8 itens)	99,67	0,13	99,72	1,58	99,72	0,56	99,72	117,30
P1-09 (1 itens)	92,40	0,02	92,40	0,02	92,40	0,03	92,40	0,03
P1-12 (2 itens)	90,10	0,02	90,10	0,03	90,10	0,08	90,10	0,08
P1-15 (7 itens)	96,36	0,11	96,36	0,75	96,74	0,44	97,11	60,11
P1-20 (9 itens)	97,96	0,16	99,04	0,28	99,31	0,63	99,45	0,89
P1-25 (3 itens)	92,67	0,05	92,67	0,05	92,67	0,13	92,67	0,11
P2-03 (3 itens)	94,24	0,03	94,24	0,09	94,24	0,08	94,24	0,25
P2-09 (3 itens)	96,67	0,08	96,67	0,13	96,67	0,20	96,67	0,25
P2-12 (6 itens)	98,31	0,09	99,29	0,14	98,31	0,36	99,29	1,16
P2-15 (4 itens)	76,65	0,09	78,75	0,09	91,96	0,09	94,17	0,17
P3-03 (3 itens)	92,59	0,03	92,59	0,11	92,59	0,09	92,59	0,97
P3-12 (2 itens)	98,88	0,05	98,88	0,06	98,88	0,11	98,88	0,11
P3-15 (2 itens)	93,25	0,03	93,25	0,09	96,23	0,08	96,23	0,11
Média	93,83	0,07	94,15	0,26	95,37	0,22	95,66	13,96
DP	5,96	0,05	5,60	0,44	3,22	0,20	3,19	35,17

Exemplar Produto - esp (n^0 itens)	MODELO 3i-GRUPO				MODELO 3t-GRUPOS			
	Exato		Não Exato		Exato		Não Exato	
	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)
P1-03 (8 itens)	99,72	1,36	99,72	138,75	99,72	16,86	99,72	3721,08
P1-09 (1 itens)	92,40	0,03	92,40	0,03	92,40	0,08	92,40	0,08
P1-12 (2 itens)	90,10	0,16	90,10	0,16	90,10	0,38	90,10	0,36
P1-15 (7 itens)	97,85	0,53	97,85	270,27	97,26	5,89	97,26	3707,17
P1-20 (9 itens)	99,31	0,56	99,45	1,03	99,45	261,59	99,57	319,22
P1-25 (3 itens)	92,67	0,17	92,67	0,17	96,02	1,28	96,02	1,81
P2-03 (3 itens)	94,24	0,05	94,24	0,25	94,24	0,22	94,24	1,52
P2-09 (3 itens)	96,67	0,42	96,67	0,44	96,67	4,75	96,67	5,31
P2-12 (6 itens)	98,31	0,88	99,29	2,17	99,29	3,91	99,35	162,48
P2-15 (4 itens)	91,96	0,16	94,17	0,23	94,17	0,20	94,17	1,70
P3-03 (3 itens)	92,59	0,08	92,59	3,80	96,82	0,66	96,82	28,63
P3-12 (2 itens)	98,88	0,13	98,88	0,13	98,88	0,86	98,88	0,88
P3-15 (2 itens)	96,23	0,19	96,23	0,20	96,23	0,33	96,23	0,38
Média	95,46	0,36	95,71	32,13	96,25	22,85	96,26	611,59
DP	3,27	0,39	3,22	81,09	2,90	71,88	2,92	1380,10

De um modo geral, o comportamento dos modelos n -grupos verticais na produção do lote simples (Tabela 3) foi semelhante a produção do lote duplo (Tabela 4). Os modelos n -grupos verticais podem ser ordenados em ordem não-decrescente de tempo de resolução dos exemplares como: 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos. Em relação à área de utilização do objeto, o modelo 3t-grupos obteve os melhores resultados, com taxa de utilização entre 90,10% e 99,72%. Na maioria dos exemplares o aproveitamento do objeto foi superior a 90%, tanto para o caso exato como para o caso não-exato. O modelo 1-grupo foi o que apresentou as piores taxas de aproveitamento do objeto, apesar de ser o mais rápido, tanto no caso exato como no não exato (no máximo 176,16s para o exemplar P1_P3-03).

Table 4: Modelos n -grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato do lote duplo

Exemplar Produto - esp (n^0 itens)	MODELO 1-GRUPO				MODELO 2-GRUPOS			
	Exato		Não Exato		Exato		Não Exato	
	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)
P1 P2-03 (10 itens)	99,67	0,25	99,72	49,97	99,72	0,94	99,72	1030,73
P1 P2-09 (4 itens)	96,67	0,16	96,67	0,11	97,64	0,19	97,64	0,48
P1 P2-12 (6 itens)	98,31	0,09	99,29	0,14	98,31	0,36	99,29	1,13
P1 P2-15 (9 itens)	96,36	0,24	96,36	4,67	98,21	0,70	98,57	2405,38
P1 P3-03 (11 itens)	99,67	0,19	99,72	176,16	99,72	0,88	99,72	3721,50
P1 P3-12 (4 itens)	98,88	0,03	98,88	0,2	98,88	0,20	98,88	1,23
P1 P3-15 (9 itens)	96,36	0,28	98,25	29,16	97,29	0,86	98,25	3703,42
P2 P3-03 (6 itens)	94,24	0,06	94,34	1,19	94,34	0,19	96,70	167,11
P2 P3-12 (8 itens)	98,88	0,14	99,29	0,58	98,97	0,86	99,29	92,45
P2 P3-15 (6 itens)	95,35	0,09	95,35	0,28	97,88	0,27	97,88	0,89
Média	97,44	0,15	97,79	26,25	98,10	0,55	98,59	1112,43
DP	1,90	0,09	1,96	55,29	1,55	0,33	0,98	1566,12

Exemplar Produto - esp (n^0 itens)	MODELO 3i-GRUPO				MODELO 3t-GRUPOS			
	Exato		Não Exato		Exato		Não Exato	
	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)	Sol (%)	T (s)
P1 P2-03 (10 itens)	99,72	1,06	99,72	3710,44	99,72	27,64	99,72	3697,61
P1 P2-09 (4 itens)	97,64	0,45	97,64	2,08	97,74	11,42	97,74	40,81
P1 P2-12 (6 itens)	98,31	0,86	99,29	2,00	99,29	3,91	99,35	162,59
P1 P2-15 (9 itens)	99,32	1,20	99,32	3712,00	98,21	13,88	98,57	3785,31
P1 P3-03 (11 itens)	99,72	1,77	99,72	3747,95	99,72	72,36	99,72	3692,30
P1 P3-12 (4 itens)	98,88	0,19	98,88	4,42	99,49	4,63	99,49	264,59
P1 P3-15 (9 itens)	98,08	1,09	98,25	3724,23	98,25	11,83	98,25	3702,36
P2 P3-03 (6 itens)	94,34	0,44	96,70	3764,98	98,63	2,09	96,70	31,47
P2 P3-12 (8 itens)	99,50	3,89	99,66	717,64	99,49	36,06	98,97	3714,08
P2 P3-15 (6 itens)	97,88	0,55	97,88	3,94	97,88	4,16	97,88	75,72
Média	98,34	1,15	98,70	1938,97	98,84	18,80	98,64	1916,68
DP	1,60	1,07	1,04	1901,97	0,78	21,83	1,00	1900,41

O tempo de resolução dos exemplares do caso não-exato foi muito superior aos do caso exato. Por esta razão, apenas os modelos do caso exato foram usados na geração de colunas para o problema de corte de estoque.

A Tabela 5 exibe os resultados obtidos para a solução do problema de corte de estoque bidimensional para a produção do lote simples. Nesta tabela, para cada exemplar e cada modelo, estão registrados o número de padrões de cortes utilizados (Pad), o número de objetos cortados (Obj), o percentual de perda de matéria-prima (Perda), número de iterações do problema mestre (It) e o tempo de processamento (T(s)) de cada exemplar (Ex). São apresentados a média e o desvio padrão dos resultados. Para obter um valor inteiro para o número de objetos cortados, foi tomado o teto ¹ da solução fracionária obtida para o problema mestre, isto é, $x_j = \lceil x_j \rceil$. Isto foi possível porque aceitamos a produção de itens em excesso (ver modelo (1)-(3)). Nestes testes assumimos que os itens podem ser rotacionados e limitamos o tempo de execução do *solver* em 3600 segundos para a solução do

¹ $\lceil x_j \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x_j

problema mestre e em 100 segundos para solução do subproblema (gerar o padrão de corte). A perda de material associada a cada padrão de corte j foi calculado de acordo com [28]:

$$\max \left\{ 0, LW - \sum_{i=1}^m [a_{ij}(l_i + \delta)(w_i + \delta)] \right\}$$

em que: a_{ij} é o número de itens i no padrão j e δ é o desgaste provocado pela espessura da serra.

Table 5: Resultados dos Modelos n -grupos verticais na resolução do problema de corte de estoque

Ex	MODELO 1-GRUPO					MODELO 2-GRUPOS				
	Pad	Obj	Perda	It	T(s)	Pad	Obj	Perda	It	T(s)
P1-03	8	139	5,80	4	2,18	6	134	3,27	8	45,59
P1-09	1	2	3,65	1	0,05	1	2	3,65	1	0,06
P1-12	2	11	4,48	2	0,13	2	11	2,13	4	0,69
P1-15	7	62	5,18	5	2,13	7	61	3,20	14	325,61
P1-20	9	36	3,69	7	10,41	9	34	0,89	18	1.798,83
P1-25	3	5	3,65	2	0,20	3	5	1,07	7	5,19
P2-03	3	146	9,70	1	0,11	3	133	5,25	4	1,29
P2-09	3	7	1,60	4	0,45	3	8	0,58	4	8,83
P2-12	6	49	2,14	9	2,81	6	47	0,23	13	456,67
P2-15	4	86	14,57	5	0,81	4	66	3,73	11	23,13
P3-03	3	80	6,12	1	0,11	3	78	5,09	4	3,83
P3-12	2	25	0,91	2	0,14	2	25	0,39	3	1,08
P3-15	2	36	1,59	1	0,08	2	46	1,24	1	0,42
Média	4,08	52,62	4,85	3,38	1,51	3,92	50,00	2,36	7,08	205,48
DP	2,56	48,40	3,75	2,57	2,84	2,36	44,37	1,77	5,38	500,35

Ex	MODELO 3i-GRUPOS					MODELO 3t-GRUPOS				
	Pad	Obj	Perda	It	T(s)	Pad	Obj	Perda	It	T(s)
P1-03	7	135	3,24	9	416,69	8	135	4,13	7	721,67
P1-09	1	2	3,65	1	0,08	1	2	3,65	1	0,08
P1-12	2	11	2,13	4	3,52	2	10	1,74	5	13,05
P1-15	7	61	3,07	18	1.745,38	7	59	1,77	14	1.440,02
P1-20	9	34	0,91	17	1.727,95	9	34	0,97	11	1.137,05
P1-25	3	5	1,07	7	41,23	3	5	0,06	8	233,50
P2-03	3	133	5,25	3	2,38	2	124	2,67	2	6,20
P2-09	3	7	0,58	4	159,17	3	8	0,04	5	466,27
P2-12	6	48	0,22	16	1.626,86	6	47	0,14	16	1.664,42
P2-15	4	65	2,99	10	318,63	4	65	2,03	8	261,03
P3-03	3	77	4,90	4	26,77	3	72	1,86	5	111,42
P3-12	2	25	0,39	4	9,27	2	25	0,27	5	60,41
P3-15	2	46	0,89	3	5,72	2	46	1,08	2	7,98
Média	4,00	49,92	2,25	7,69	467,97	4,00	48,62	1,57	6,85	471,01
DP	2,45	44,52	1,72	5,86	715,01	2,61	42,88	1,34	4,56	586,66

Os modelos n -grupos verticais usados na geração de colunas para o problema de corte de estoque considerando lotes simples e duplos apresentam resultados similares. Por isso apresentamos apenas os resultados para o lote simples. O número de padrões de corte diferem em no máximo dois padrões quando comparamos os resultados associados aos quatro modelos. Em relação ao número de objetos cortados,

com exceção dos exemplares P1-03 e P2-09, o modelo 3t-grupos foi o que apresentou o menor número de objetos a serem cortados para atender a demanda. Para os exemplares, P2-15 e P3-03, o modelo 1-grupo não apresentou soluções aceitáveis para a indústria. Apesar da solução ser obtida em menor tempo computacional, a perda total associada foi superior a 6%, enquanto que a solução dos demais modelos possuem perda total inferior a 5,25% (solução do exemplar P2-03 do modelo 2-grupos e 3i-grupos). O número total de iterações variou, em geral, entre 1 e 18. O número máximo de itens é 11.

Na Figura 4 ilustramos os padrões gerados com os modelos n -grupos na produção dos itens de 15mm do produto P2 (exemplar P2-15). Observe que os padrões homogêneos, que compõem a matriz básica inicial, não fazem parte da solução. Outro fato interessante é que os padrões não se repetem.

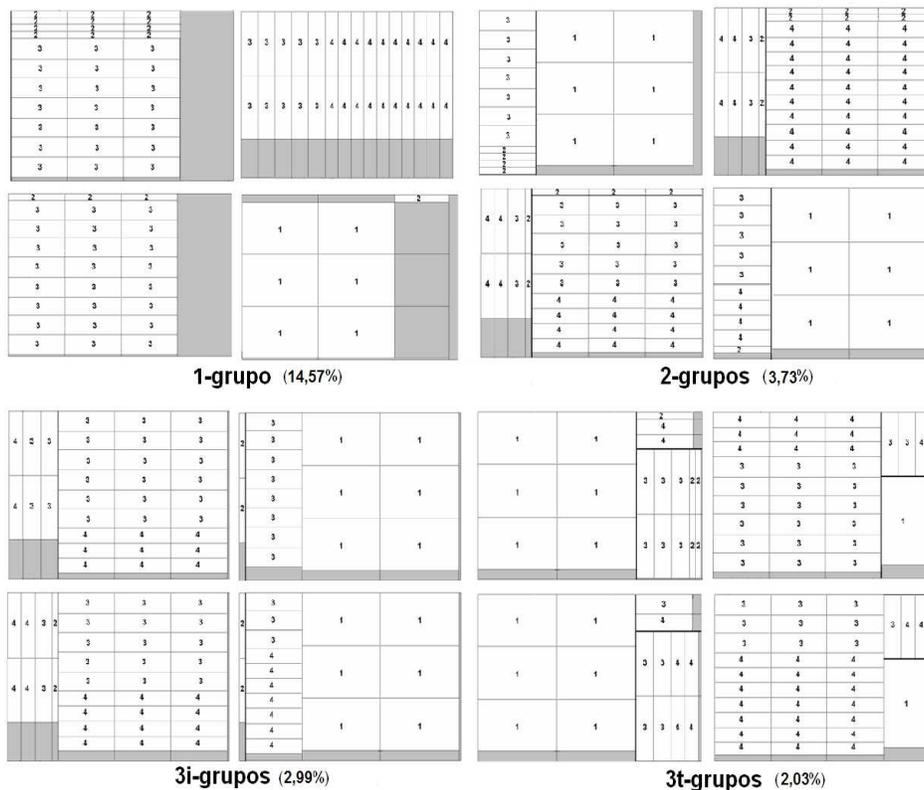


Figure 4: Padrões de cortes gerados com os modelos n -grupos para o exemplar P2-15.

Os modelos n -grupos ($n > 1$), no geral, apresentaram bons resultados. As melhores soluções do problema de corte de estoque foram obtidas com o modelo 3t-grupos

(quantidade menor de objetos e menor perda). A desvantagem destes modelos é o tempo de resolução dos exemplares, que em geral, são altos, e dependem da relação entre as dimensões dos itens e do objeto. Portanto estes modelos devem ser usados quando o planejamento é feito com maior antecedência. Para obtenção de soluções mais rápidas, que auxiliem um planejamento emergencial é recomendado o uso do modelo 1-grupo. Mais detalhes sobre os métodos de solução propostos e o estudo computacional realizado podem ser encontrados em [16].

Conclusões

Neste trabalho apresentamos um estudo do problema de corte de estoque no contexto do planejamento de produção na indústria de móveis. Foi observado que pequenas melhorias nos processos que envolvem o corte da matéria-prima podem resultar em ganhos substanciais, dependendo da escala de produção, e representar um ganho na redução dos custos de produção. A contribuição deste trabalho é na análise do comportamento computacional de modelos de otimização linear inteira propostos na literatura para a geração de padrões de corte n -grupos. Desconhecemos resultados publicados na literatura que avaliem a eficiência computacional do uso destes modelos na geração de colunas para o problema de corte de estoque. Os modelos n -grupos ($n > 1$) geraram soluções com índices de perda total dentro dos limites aceitáveis pela indústria (entre 0,04% e 5,25%), sendo que a menor perda foi obtida com a solução de exemplares dos modelos 3t-grupos. O tempo computacional necessário para a solução de exemplares dos modelos n -grupos ($n > 1$) é muito superior ao tempo de solução dos exemplares do modelo 1-grupo, sugerindo que o planejamento dos padrões de corte seja feito com antecedência. É importante observar que o planejamento dos padrões de corte na fábrica estudada é feito manualmente por tentativa e erro e pode demorar dias.

Diversos procedimentos podem ser considerados para aumentar a eficiência do planejamento do corte de matéria-prima: a resolução dos modelos n -grupos ($n > 1$) pode ser melhorada com a inclusão de limites superiores e inferiores, novas estratégias de *branching* e inequações válidas no método *branch and cut*; adaptação do algoritmo proposto em [9] para a geração de padrões do tipo 3t-grupos. Para melhorar a taxa de utilização da máquina seccionadora seria interessante incluir o seqüenciamento dos padrões de corte no problema de corte de estoque [27]; e/ou incluir restrições para reduzir o número de ciclos da serra no problema de corte de estoque (e.g. [26]). Outra direção de pesquisa é acoplar o problema de dimensionamento de lotes ao problema de corte de estoque para permitir uma melhor avaliação da utilização da matéria-prima (e.g. [15,2]).

References

1. Abimóvel, *Panorama do setor moveleiro no Brasil: informações gerais*, (2006).
2. S. Araujo, S. Rangel, S. Santos, *Lot sizing and cutting machine programming problem in furniture industry*. In: 4th International Conference on Production Research - ICPR Americas 2008, São Paulo-SP. ICPR Americas 2008.
3. M. N. Arenales, R. Morabito, H. H. Yanasse, *Problemas de Corte e Empacotamento*. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 36., 2004, São João Del Rei. Mini curso..., São João Del Rei: SOBRAPO, 2690 - 2769,(2004).

4. J. E. Beasley, *Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting*. Journal of the Operational Research Society 36, 297-306, (1985).
5. C. Carnieri, A. Guillermo, L. Gavinho, *Solutions procedures for cutting lumber into furniture parts*. European Journal Operations Research 73, 495-501, (1994).
6. R. Cavali, *Problemas de corte e empacotamento na indústria de Móveis: um estudo de caso*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-Unesp, São José do Rio Preto, (2004).
7. V. Chavátal, *Linear Programming*. New York: W. H. Freeman and Company, (1983).
8. N. Christofides, E. Hadjicinstabtinou, *An algorithm for two-dimensional cutting problem*. European Journal Operations Research 83, 21-38, (1995).
9. Y. Cui, *An exact algorithm for generating homogenous T-shape cutting patterns*. Computers and OR 34, 1107-1120, (2007).
10. Dash Optimization, *Applications of Optimization with XpressMP*. Tradução para o inglês de Programation Linéaire de C. Guéret, C. Prins, M. Sevaux, Dash Optimization Ltda, (2000).
11. O. Du Merle, D. Villeneuve, J. Desrosiers, P. Hansen, *Stabilized column generation*. Discrete Mathematics 194, 229-237, (1999).
12. P. C. Gilmore, R. E. Gomory, *A linear programming approach to the cutting-stock problem*. Operations Research 9, 849-859, (1961).
13. P. C. Gilmore, R. E. Gomory, *A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II*. Operations Research 11, 863-888, (1963).
14. P. C. Gilmore, R. E. Gomory, *Multistage cutting stock problems of two and more dimensional*. Operations Research 14, 1045-1074, (1965).
15. M. C. N. Gramani, P. M. França, *The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes*. European Journal of Operational Research 174, 509-521, (2006).
16. A. P. Faccio, *Propostas de Solução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional de uma Fábrica de Móveis de Pequeno Porte*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-Unesp, São José do Rio Preto, (2008).
17. S. Foronda, H. Carino, *A heuristic approach to the lumber allocation and manufacturing in hardwood dimension and furniture manufacturing*. European Journal Operations Research 54, 151-162, (1991).
18. D. M. Katsurayama, H. H. Yanasse, *Um algoritmo para geração de padrões tabuleiros exatos a partir de uma combinação dada de itens*, Anais do XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, (2004).
19. A. Lodi, M. Monaci, *Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems*. Mathematical Programming 94, 257-278, (2003).
20. M. Hifi, *The DH/KD algorithm: A hybrid approach for unconstrained two-dimensional cutting problem*. European Journal Operations Research 97, 41-52, (1997).
21. M. Hifi, C. Rocairol *Approximate and exact algorithms for constrained (un)weighted two-dimensional two-staged cutting stock problem*. Journal of Combinatorial Optimization 5, 465-494, (2001).
22. R. Morabito, M. N. Arenales, *Stage and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: an AND/OR-graph approach*. International Journal of Production Research 94, 548-560, (1996).
23. R. Morabito, M. N. Arenales, *Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company*. International Journal of Production Research 38, 2725-2742, (2000).
24. R. Morabito, L. Belluzzo, *Optimising the cutting of wood fibre plates in the hardboard industry*. European Journal Operations Research 183, 1405-1407, (2007).
25. R. Morabito, V. Garcia, *The cutting stock problem in a hardboard industry: a case study*. Computers Operations Research 25, 469-485, (1998).

26. S. Rangel, G. P. Mosquera, The cutting stock problem with reduction of saw machine set ups in a small scale furniture plant, Relatório Técnico DCCE-UNESP, São José do Rio Preto, (2008).
27. G. C. F. Pileggi, *Abordagens para Otimização Integrada dos Problemas de Geração e Sequenciamento de Padrões de Corte*, Tese de Doutorado, ICMC-USP, São Carlos, (2002).
28. S. Rangel, A. Figueiredo. *O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio porte*, Pesquisa Operacional, v.28, p451-472, (2008).
29. J. Riehme, G. Scheithauer, J. Terno, *The solution of two-stage guillotine cutting stock problems having extremely varying order demands*. European Journal of Operational Research 91, 543-552, (1995).
30. M. A. Santi, *Contribuição aos estudos sobre as origens da produção seriada do mobiliário no Brasil: a experiência Móveis Cimo S/A*. Dissertação de Mestrado, FAU - USP, São Paulo, (2006).
31. S. M. P. G. Santos, *Modelagem do problema integrado de dimensionamento do lotes e corte de estoque numa indústria moveleira*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-Unesp, São José do Rio Preto, (2008).
32. P. H. Vance, *Branch and Price Algorithms for the One-Dimensional Cutting Stock Problem*. Computational Optimization and Applications 9, 211-228, (1998).
33. H. H. Yanasse, R. Morabito, *Linear models for one-group two-dimensional guillotine cutting problems*. International Journal of Production Research 44, 3471-3491, (2006).
34. H. H. Yanasse, R. Morabito, *A note linear models for two-group and three-group two-dimensional guillotine cutting problems*, International Journal of Production Research, v.46, n.1, p.6189-6206 (2008). doi: 10/1080/00207540601011543.
35. H. H. Yanasse, A. Zinober, R. Harris, *Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes*. Journal of Operational Research Society 42, 673-683, (1991).

Ana Paula Faccio
Departamento de Matemática,
UNIPAR - Universidade Paranaense,
CEP: 84172-440, Cascavel - PR, Brasil,
apfaccio@yahoo.com.br

and

Socorro Rangel (autor para correspondência)
UNESP - Universidade Estadual Paulista
DCCE/IBILCE
CEP: 15054-000, São José do Rio Preto - SP, Brasil,
socorro@ibilce.unesp.br