



Transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas em anel*

Ludmila Bourchtein e Adriana Neumann de Oliveira

RESUMO: Neste artigo são construídas, de forma concreta, transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas em anel. Para isso utilizamos as funções elementares e suas propriedades, os princípios básicos das transformações conformes, o princípio de simetria de Riemann-Schwarz e a integral de Schwarz-Christoffel.

Key Words: transformações conformes, simetria de Riemann-Schwarz, integral de Schwarz-Christoffel

Sumário

1	Introdução	79
2	Construção das transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas em anel	81
2.1	Primeira região duplamente conexa	81
2.2	Segunda região duplamente conexa	85

1. Introdução

Uma das teorias importantes da matemática é a das transformações conformes, que possui várias aplicações na física. A investigação das transformações conformes de regiões multiplamente conexas teve começo na primeira metade do século XX nos trabalhos de Kőbe, Carathéodory, Gilbert, Grunsky, Goluzin, Schiffer e outros. Um dos seus problemas principais é construir de forma concreta uma composição de funções que faça a transformação conforme de uma região dada em uma região canônica. Nem sempre existe transformação conforme de uma região multiplamente conexa à outra. Para existir tal transformação precisamos satisfazer as condições necessárias, uma delas é que as regiões devem ter o mesmo grau de conexão. Mas, essa condição não garante a existência da transformação conforme. Por exemplo, dadas duas regiões duplamente conexas quaisquer não podemos afirmar que existe transformação conforme de uma dessas regiões à outra. Ao mesmo tempo, temos um teorema que garante que qualquer região duplamente conexa pode ser transformada biunivocamente num anel [1,2], que é considerado na qualidade de região canônica para regiões duplamente conexas. Porém, não temos nenhum algoritmo para construção de forma concreta desta função.

* Agradecemos ao apoio do CNPq e da FAPERGS
2000 *Mathematics Subject Classification*: 30C20, 33E05
Date submission 10-Fev-2005.

Neste trabalho vamos construir de forma concreta transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas, que possuem algum tipo de simetria, em anéis. Na resolução deste problema utilizamos as funções elementares e suas propriedades [1,4] e os princípios básicos das transformações conformes [4,5]. Para ampliar a classe das regiões para as quais podemos construir a sua transformação concretamente utilizamos, também, o princípio de simetria de Riemann-Schwarz [4,5] e a transformação de Schwarz-Christoffel (integral elíptica de 1ª espécie de Legendre) [1,4,5].

Relembremos, agora, alguns conceitos e resultados importantes para a construção feita neste trabalho.

Definição 1.1 Uma função $w = f(z)$ é chamada regular num ponto z_0 , se $f(z)$ pode ser desenvolvida numa série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

que converge num círculo $|z - z_0| < r$ com centro no ponto z_0 .

Definição 1.2 Uma função $w = f(z)$, definida na região D , é chamada regular nessa região se ela é regular em qualquer ponto dessa região.

É conhecido [1,5] que a regularidade de uma função numa região é equivalente à diferenciabilidade dessa função na mesma região.

Definição 1.3 A função $f(z)$ é chamada univalente numa região D , se $\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2$, segue que $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Se considerarmos $f(z)$ unívoca e univalente na região D , neste caso então teremos $f(z)$ biunívoca.

Definição 1.4 Se a função $f(z)$ é regular e univalente na região D , então $f(z)$ realiza transformação conforme dessa região.

Agora, iremos lembrar também os princípios básicos das transformações conformes.

Princípio da conservação de regiões

Seja a função $f(z)$ regular na região D e diferente de constante idêntica nesta região, então $f(z)$ transforma a região D numa região.

Princípio da correspondência de fronteiras

Sejam D e G regiões simplesmente conexas, cujas fronteiras são curvas suaves por partes, $\Gamma = \partial D$ e $C = \partial G$, a função $f(z)$ é regular na região D e contínua em \bar{D} . Se a um percurso positivo do ponto z pela curva Γ corresponde um percurso positivo do ponto $w = f(z)$ pela curva C , então a função $w = f(z)$ transforma a região D na região G de modo biunívoco.

Princípio da Simetria de Riemann-Schwarz

Seja D alguma região cuja fronteira contém o segmento γ do eixo real. Seja a função $w = f(z)$ regular na região D e contínua em $D \cup \gamma$ e $f(z)$ assume valores reais no segmento γ , isto é, a imagem de γ é um segmento Γ que está sobre o

eixo real através da transformação $f(z) : \Gamma = f(\gamma)$. Então a função $f(z)$ pode ser prolongada analiticamente da região D para a região D' que é simétrica à D em relação ao eixo real; o prolongamento dessa função define-se do seguinte modo:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D' \end{cases}$$

Definição 1.5 A integral de Schwarz-Christoffel (integral elíptica de 1ª espécie) tem a seguinte forma

$$w = F(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad 0 < k < 1, \quad \text{Im } z > 0. \quad (1)$$

O parâmetro k chama-se módulo da integral (1) e o número k' , $k^2 + k'^2 = 1$, é o módulo adicional.

A função (1) transforma biunivocamente o semiplano superior num retângulo de tal modo que os pontos do eixo real $1, 1/k, -1/k, -1$ passam, respectivamente, nos pontos $K, K + iK', -K + iK', -K$, os quais são os vértices deste retângulo, onde

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

é integral elíptica completa de primeira espécie e

$$K' = K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = K(k'), \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

A função inversa de (1) tem a forma

$$z = sn(w, k), \quad 0 < k < 1$$

e chama-se *seno elíptico* [1,4]; essa função realiza a transformação conforme do retângulo ao semiplano superior.

2. Construção das transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas em anel

Agora, vamos construir de forma concreta transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas (figuras 1 e 12) num anel. Novamente mencionamos que para realizar esta tarefa utilizamos as funções elementares e suas propriedades, os princípios básicos das transformações conformes, o princípio de simetria de Riemann-Schwarz e a integral de Schwarz-Christoffel.

2.1. PRIMEIRA REGIÃO DUPLAMENTE CONEXA. A região do plano z (figura 1) que chamaremos de região inicial, possui simetria em relação aos raios, então fazemos cortes auxiliares e tomamos uma das partes que é simétrica às outras $2n$ partes; a qual chamaremos de região auxiliar (figura 2).

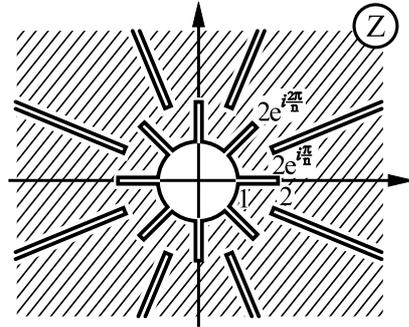


figura 1

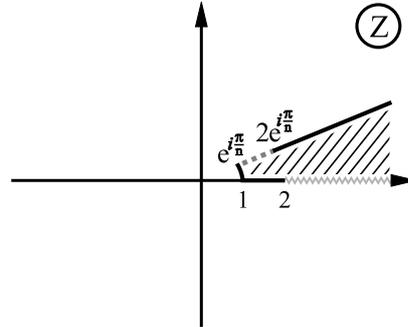


figura 2

Nosso objetivo é transformar biunivocamente esta região auxiliar do plano z num setor de anel, de tal forma que as partes da fronteira que correspondem a fronteira da região inicial passam nos arcos de circunferência (veja figura 10).

Para iniciar esta transformação, usamos a função de potência, $z_1 = z^n$, e obtemos a região do plano z_1 (figura 3). Como a região do plano z_1 é uma das regiões de univalência da função de Jukowski e sabemos que ela transforma a circunferência unitária com centro na origem no segmento $[-1, 1]$ do eixo real, a segunda função que usamos é a função de Jukowski: $z_2 = \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right)$. Desta forma, obtemos no plano z_2 todo o semiplano superior (figura 4), com as partes da fronteira que correspondem a fronteira da região inicial sobre os segmentos $(-\infty, -A]$ e $[-1, A]$ do eixo real, onde $A = 2^{n-1} + 2^{-(n+1)}$.

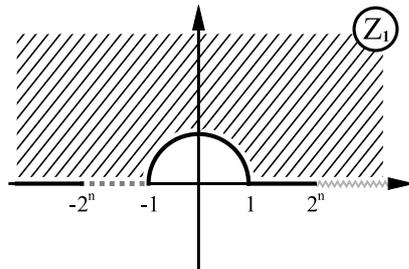


figura 3

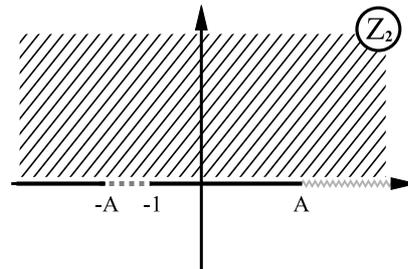


figura 4

Precisamos transformar o semiplano superior nele mesmo de tal maneira que as partes da fronteira que correspondem a fronteira da região inicial passam em intervalos simétricos. Para fazer isso utilizaremos uma transformação homográfica.

Construímos no plano z_2 duas circunferências C_1 e C_2 ortogonais ao eixo real, de tal modo que C_1 passa pelos pontos $-A$ e -1 e C_2 pelos pontos A e ∞ (veja figura 5). Notamos que a circunferência C_1 tem centro no ponto $a = -\frac{1+A}{2}$ e

raio $r = \frac{A-1}{2}$. Denotamos por z_1'' e z_2'' os pontos simétricos, ao mesmo tempo, às circunferências C_1 e C_2 . Pelo sentido geométrico vemos que, neste caso, estes pontos pertencem ao eixo real. Utilizando a definição de pontos simétricos [4] chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} z_2'' - A = A - z_1'' \\ z_2'' = a + \frac{r^2}{z_1'' - a} \end{cases},$$

de onde segue que

$$\begin{cases} z_1'' = A - \sqrt{2A^2 + 2A} \\ z_2'' = A + \sqrt{2A^2 + 2A} \end{cases}, \tag{2}$$

com $A = 2^{n-1} + 2^{-(n+1)}$.

Consideramos a função homográfica $z_3 = \frac{z_2 - z_1''}{z_2 - z_2''}$. Ela transforma biunivocamente o semiplano superior do plano z_2 no semiplano inferior do plano z_3 (figura 6), de tal forma que o ponto z_1'' é levado no ponto zero e o ponto z_2'' no ponto infinito. Devido as propriedades das funções homográficas, temos que as circunferências C_1 e C_2 são levadas nas circunferências Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Como z_1'' e z_2'' são simétricos simultaneamente à C_1 e C_2 , da propriedade de invariância dos pontos simétricos das funções homográficas, temos que os pontos zero e infinito são simétricos, ao mesmo tempo, à Γ_1 e Γ_2 , de onde segue que Γ_1 e Γ_2 são circunferências concêntricas com centro na origem (figura 6). Desta forma, os pontos ∞ , $-A$, -1 e A são transformados nos pontos 1 , B , $-B$ e -1 , que determinam intervalos simétricos, onde

$$B = \frac{3A + 1 - 2\sqrt{2A^2 + 2A}}{A - 1} = \left(\frac{\sqrt{2^{2n+1} + 2} - 2^n - 1}{2^n - 1} \right)^2. \tag{3}$$

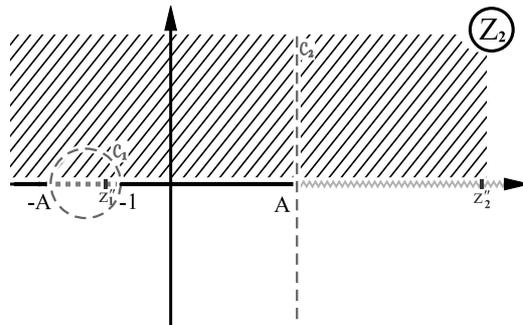


figura 5

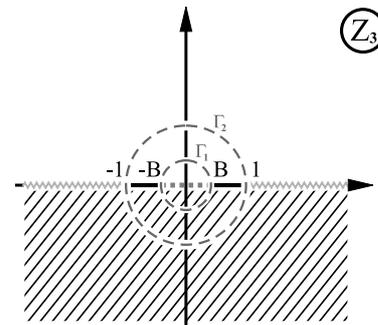


figura 6

Rotacionamos e extendemos esta região do plano z_3 com a função linear: $z_4 = -\frac{1}{B}z_3$ e obtemos o semiplano superior do plano z_4 (figura 7). Aplicamos à esta região do plano z_4 a integral de Schwarz-Christoffel (1), com o valor de $k = B$, e chegamos no plano z_5 ao retângulo da figura 8, onde K e K' definem-se

deste modo:

$$K = K(B) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-B^2t^2)}}, \quad (4)$$

$$K' = K'(B) = \int_1^{1/B} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-B^2t^2)}} = K(B'), \quad B^2 + B'^2 = 1. \quad (5)$$

Notamos que os valores K e K' podem ser encontrados em tabelas [3] se soubermos o valor de n .

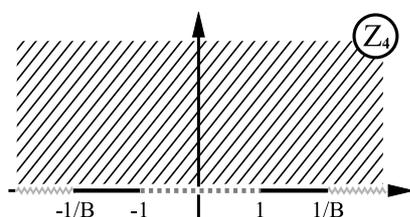


figura 7

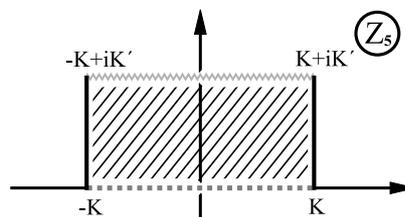


figura 8

Vamos transformar, um pouco, o retângulo do plano z_5 . Para isso, usamos a função linear: $z_6 = \frac{\pi}{nK'}(z_5 + K)$, e obtemos o retângulo da figura 9, que aplicando a função exponencial: $w = e^{z_6}$, teremos um setor de um anel com as partes da fronteira que correspondem a fronteira da região inicial sobre os arcos de circunferência (figura 10); que era o nosso objetivo.

Assim, construímos a composição de funções:

$$w = g(z) = \exp \left\{ \frac{\pi}{nK'} \left[\int_0^{z_4} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-B^2t^2)}} + K \right] \right\}, \quad z_4 = -\frac{z^n + z^{-n} - 2z_1''}{B(z^n + z^{-n} - 2z_2'')},$$

que transforma biunivocamente a região auxiliar do plano z (figura 2) no setor de anel do plano w (figura 10), com raios 1 e $e^{\frac{2\pi K}{nK'}}$; os valores de z_1'' , z_2'' , B , K e K' são calculados pelas fórmulas (2), (3), (4) e (5), respectivamente. Agora, utilizamos o princípio de simetria de Riemann-Schwarz para prolongar analiticamente a composição de funções $w = g(z)$ em relação aos cortes auxiliares e fazendo isso $2n$ vezes, teremos que a função prolongada transforma biunivocamente a região inicial do plano z (figura 1) no anel do plano w (figura 11).

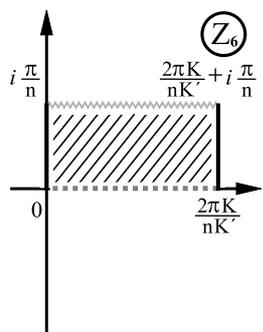


figura 9

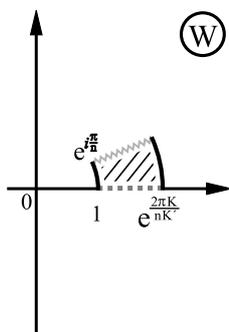


figura 10

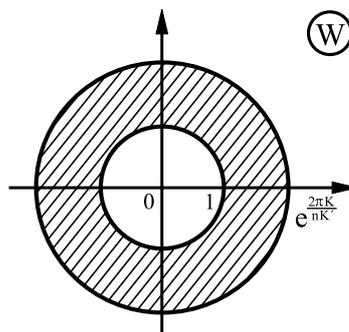


figura 11

2.2. SEGUNDA REGIÃO DUPLAMENTE CONEXA. Esta região do plano z (figura 12) possui simetria em relação ao eixo real, então fazemos um corte auxiliar e tomamos uma das partes que é simétrica à outra (figura 13).

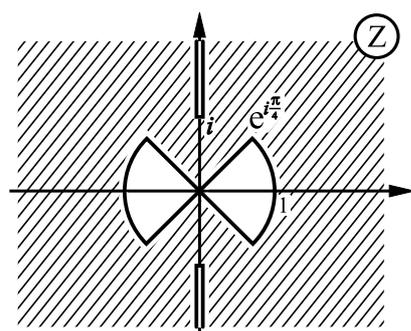


figura 12

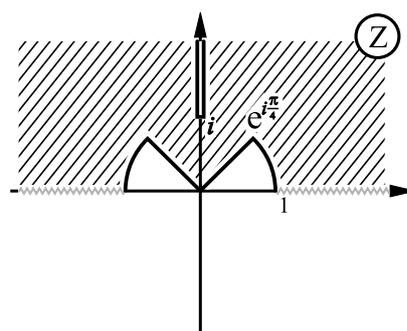


figura 13

A região da figura 13 possui simetria em relação ao eixo imaginário, então, novamente, fazemos um corte auxiliar e escolhemos uma das partes desta região que é simétrica à outra (figura 14), esta região chamaremos de região auxiliar.

Para esta construção, nosso objetivo, também, é transformar a região auxiliar num setor de anel de tal forma que as partes da fronteira que correspondem a fronteira da região inicial fiquem sobre os arcos de circunferência. Iniciamos esta transformação utilizando a função de potência: $z_1 = z^2$, para ampliarmos no ponto zero todos os ângulos da região auxiliar e chegarmos na região do plano z_1 (figura 15).

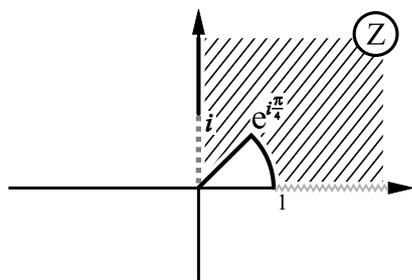


figura 14

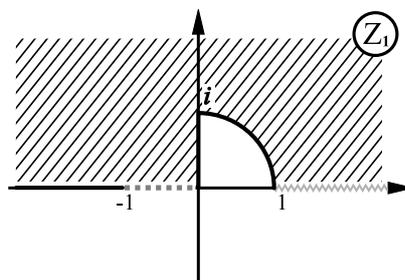


figura 15

O próximo passo desta transformação é a utilização da função de Jukowski: $z_2 = \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right)$, pois notamos que a região do plano z_1 é uma das regiões de univalência desta função. A imagem desta transformação é a região do plano z_2 (figura 16). Agora, usamos a função $z_3 = \frac{1}{z_2}$ para transformar, um pouco, a fronteira da região do plano z_2 e obtemos a região do plano z_3 (figura 17).

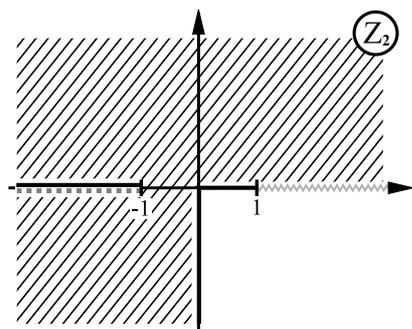


figura 16

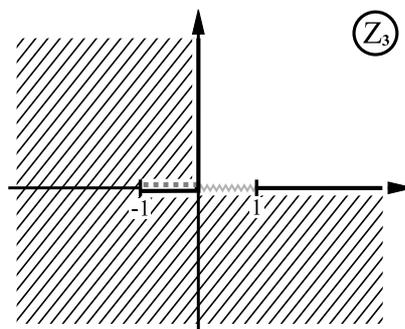


figura 17

A região do plano z_3 é uma região onde podemos escolher um ramo regular da função inversa da função de Jukowski, então a utilizamos: $z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}$, para transformar o segmento $[-1, 1]$ do eixo real em parte de uma circunferência unitária com centro na origem (figura 18). Rotacionamos e reduzimos todos os ângulos no ponto zero da região do plano z_4 com a função $z_5 = (-iz_4)^{2/3}$ e chegamos ao semiplano superior sem o círculo unitário superior no plano z_5 (figura 19).

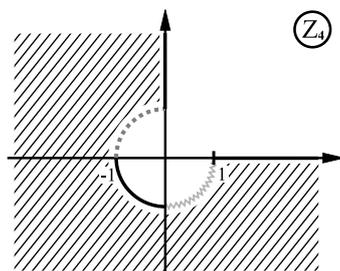


figura 18

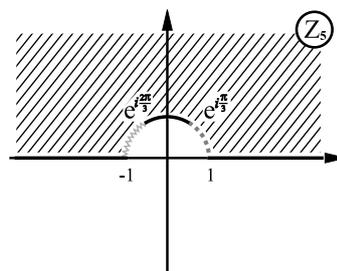


figura 19

Agora, usamos a função de Jukowski, $z_6 = \frac{1}{2} \left(z_5 + \frac{1}{z_5} \right)$, para transformar a semicircunferência da região do plano z_5 no segmento $[-1, 1]$ do eixo real e obter todo semiplano superior (figura 20). Utilizamos a função linear: $z_7 = 2z_6$, para transformar, um pouco, a fronteira da região do plano z_7 (figura 21).

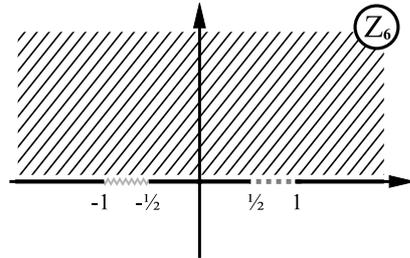


figura 20

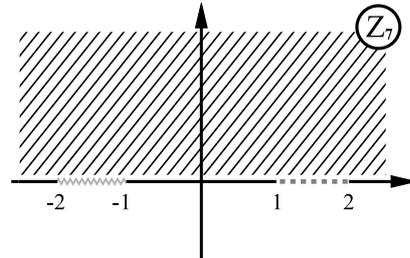


figura 21

Assim, o semiplano superior do plano z_7 é transformado no retângulo do plano z_8 (figura 22) usando a integral de Schwarz-Christoffel (1), com o valor de $k = 1/2$. Os números K e K' têm a seguinte forma:

$$K = K \left(\frac{1}{2} \right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2/4)}}, \quad K' = K \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

e seus valores aproximados são: $K = 1,6858$ e $K' = 2,1565$; estes valores podem ser encontrados em tabelas [3].

Transformamos, um pouco, o retângulo do plano z_8 com a função linear: $z_9 = \frac{-i\pi}{8K} (z_8 - K)$ e chegamos ao retângulo da figura 23.

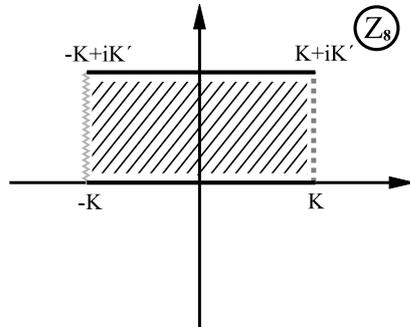


figura 22

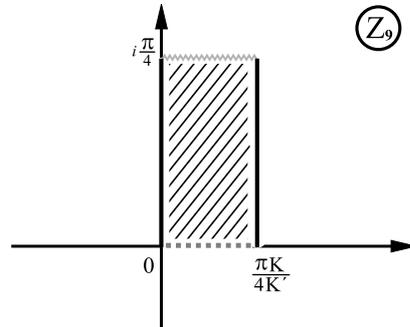


figura 23

Aplicando a função exponencial $w = e^{z_9}$ na região do plano z_9 atingimos nosso objetivo, que era obter um setor de anel, de tal forma que as partes da fronteira que correspondem a fronteira da região inicial fiquem sobre os arcos de circunferência (figura 24).

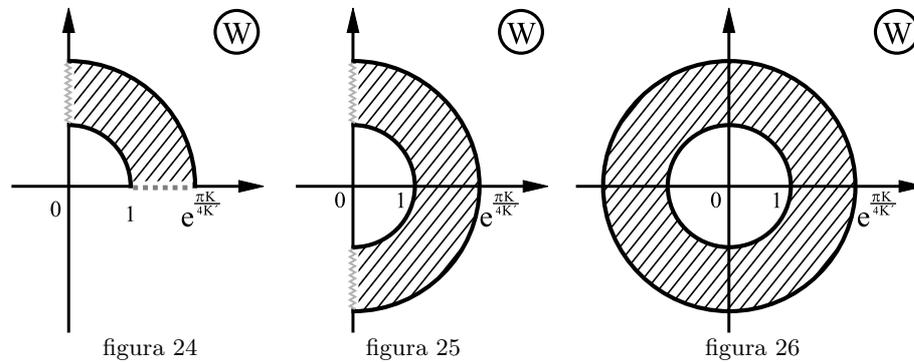
Desta forma, construímos a composição de funções:

$$w = h(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \exp \left[\frac{-i\pi}{8K} \int_0^{z_7} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2/4)}} \right],$$

onde

$$z_7 = \left(\frac{z^2 - z^{-2} - 2i}{z^2 + z^{-2}} \right)^{2/3} + \left(\frac{z^2 + z^{-2}}{z^2 - z^{-2} - 2i} \right)^{2/3},$$

que transforma biunivocamente a região auxiliar do plano z (figura 14) no setor de anel do plano w (figura 24). Agora, utilizamos o princípio de simetria de Riemann-Schwarz para prolongar analiticamente a composição de funções $w = h(z)$ em relação ao último corte auxiliar feito no plano z (veja figuras 13 e 14). Assim, teremos que esta função prolongada transforma biunivocamente a região da figura 13 na região da figura 25. Usando, outra vez, o princípio de simetria de Riemann-Schwarz obtemos que a função prolongada transforma biunivocamente a região inicial do plano z (figura 12) no anel do plano w (figura 26).



Referências

1. C. Carathéodory, *Conformal Representation*, Dover Pub., New York, 1998.
2. G. M. Goluzin, *Teoria Geométrica das Funções de Variável Complexa*, Nauka, Moscou, 1968.
3. E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch, *Tables of Higher Functions*, McGraw-Hill, New York, 1960.
4. Z. Nehari, *Conformal Mapping*, Dover Pub., New York, 1997.
5. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Ludmila Bourchtein e Adriana Neumann de Oliveira
 Departamento de Matemática, Estatística e Computação
 Instituto de Física e Matemática
 Universidade Federal de Pelotas
 Campus Universitário da UFPel
 96010-900, Capão do Leão-RS, Brasil
 e-mail: burstein@terra.com.br, adriana.neumann@terra.com.br