Bol. Soc. Paran. Mat.
(3s.) **v. 23** 1-2 (2005): 137–150.
©SPM –ISNN-00378712

Teorema de Jurdjevic e Kupka no grupo $SL(n, \mathbb{R})$

Bernadete Maria Suaki Brandão

Resumo: Neste trabalho apresentamos a demonstração do Teorema de Jurdjevic e Kupka [9] que estabelece condições suficientes para controlabilidade de uma família de sistemas bilineares no grupo $SL(n, \mathbb{R})$.

Key words: Grupos de Lie, sistemas bilineares, controlabilidade, álgebras de Lie.

Conteúdo

Introdução

Controlabilidade de sistemas em grupos de Lie vem sendo estudada desde o início dos anos 70. Brockett [3] considerou problemas aplicados a sistemas de controle em grupos de matrizes e seus espaços homogêneos. O estudo sistemático de sistemas de controle em grupos de Lie foi iniciado por Jurdjevic e Sussmann [10], onde foram estabelecidas propriedades básicas dos conjuntos de atingibilidade e órbitas. A teminologia usada atualmente foi estabelecida por Jurdjevic e Kupka [9].

A questão de establecer condições necessárias e suficientes para que uma família de campos lineares seja controlável encontra-se ainda como um problema em aberto. No entanto tem-se alguns resultados nesse sentido. Um resultado de longo alcance nessa direção são as condições suficientes proporcionadas por Jurdjevic e Kupka [9]. Essas condições foram estendidas a sistemas invariantes em grupos de Lie semi-simples por Jurdjevic e Kupka [8]. Análises posteriores dessas condições foram feitas em El Assoudi e Gauthier [4], Gauthier, Kupka e Sallet [5] e Silva Leite e Crouch [11], entre outros. Trabalhando no contexto mais geral de semigrupos, San Martin e Tonelli [16] e San Martin [14] estabeleceram que a controlabilidade de sistemas bilineares pode ser reduzida à controlabilidade de sistemas invariantes em grupos semi-simples. Uma classificação detalhada da controlabilidade de sistemas bilineares em dimensão dois é apresentada em Braga Barros, Gonçalves, do Rocio e San Martin [1].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 93B05, 22E15
Date submission 23-Nov-2005.

O objetivo do presente trabalho é apresentar o caso particular do teorema de Jurdjevick e Kupka, que estabelece condições suficientes para a controlabilidade de uma família de sistemas bilineares do tipo $\dot{X} = (A + uB)\,X$ em grupos de Lie semi-simples. Jurdjevic e Kupka demonstraram primeiramente o tal teorema em $SL\,(n, \mathbb{R})$ e posteriormente publicaram a demonstração geral [8]. Apresentaremos a demonstração do mesmo nos moldes em que originalmente foi feita.

1. Controlabilidade de sistemas

Nesta seção introduziremos as noções básicas da teoria de controle para sistemas de campos vetoriais invariantes à direita em grupos de Lie e seus espaços homogêneos. O principal resultado da seção é o Teorema 1.5 o qual estabelece que um sistema é controlável se, e somente se, o elemento identidade do grupo pertence ao interior do conjunto de atingibilidade. Em todo esse trabalho G denotará um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. As demonstrações dos resultados citados nessa seção podem ser encontrados em [2], [6] e [15].

Um *sistema de controle invariante à direita* em um grupo de Lie G é um conjunto arbitrário Γ de campos de vetores invariantes à direita em G, isto é, qualquer subconjunto

$$\Gamma \subset \mathfrak{g}.$$

Por simplicidade, sempre que nos referirmos a "sistema" estaremos nos referindo a um sistema invariante à direita, ou seja, a um subconjunto da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Uma *trajetória* de um sistema Γ em G é uma curva contínua $x(t)$ em G, definida em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tal que existe uma partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ e elementos $A_1, A_{2,...}, A_k$ em Γ tais que a restrição de $x(t)$ a cada intervalo aberto (t_{i-1}, t_i) seja diferenciável e $x'(t) = A_i(x(t))$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Em outras palavras, uma trajetória de Γ é uma concatenação de trajetórias de campos de Γ.

O *conjunto de atingibilidade* de um sistema invariante à direita Γ em G, a partir de um ponto $x \in G$, é o subconjunto $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ de G consitindo de todos os pontos finais de trajetórias não negativas de Γ com ponto inicial em x, ou seja,

$$\mathbb{A}_\Gamma(x) := \{x(T) : x(\cdot) \text{ é uma trajetória de } \Gamma,\ x(0) = x \ \text{ e } \ T \geqslant 0\}.$$

Um sistema Γ é *controlável* a partir de um ponto $x \in G$ se $\mathbb{A}_\Gamma(x) = G$ e é controlável em G se for controlável a partir de todo ponto.

Um sistema Γ é *acessível* em um ponto $x \in G$ se o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ a partir de x possuir interior não vazio em G.

Diremos que um sistema é acessível se ele for acessível a partir de todo ponto.

Associado ao conjunto de atingibilidade de um sistema Γ temos a *órbita* do sistema passando pelo ponto $x \in G$. Este conjunto será denotado por $\mathcal{O}\,(x)$ e definido como:

$$\mathcal{O}(x) := \{x\,(T) : x\,(.) \text{ é uma trajetória de } \Gamma,\ x\,(0) = x,\ T \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $\exp : \mathfrak{g} \to G$ a aplicação exponencial do grupo de Lie G e seja $A \in \mathfrak{g}$ um elemento fixo. A trajetória do campo vetorial A passando pelo elemento neutro e

é o grupo a um parâmetro $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, e a trajetória de A passando pelo ponto $x \in G$ é $\exp(tA)x$, $t \in \mathbb{R}$.

Para qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ denotaremos por $\operatorname{Lie}\Gamma$ a menor subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contém Γ. Eventualmente também denotaremos a álgebra de Lie do subgrupo de Lie H de G por $\operatorname{Lie}(H)$. O contexto deixará claro a que a notação se refere.

Os próximos resultados desta seção agrupam algumas propriedades básicas da teoria de sistemas de campos invariantes à direita em grupos de Lie que necessitaremos nas seções posteriores. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [6].

Proposição 1.1 *Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e Γ um subconjunto de $\mathfrak{g}$. Se x é um ponto arbitrário de G então:*

(i) $\mathcal{O}(x) = \{\exp(t_k A_k).\exp(t_{k-1}A_{k-1})\cdots\exp(t_1 A_1)x : A_i \in \Gamma,\ t_i \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\}$

(ii) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(e)x$

(iii) $\mathcal{O}(e)$ *é o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é* $\operatorname{Lie}\Gamma$

(iv) $\mathcal{O}(x)$ *é a variedade integral maximal da distribuição involutiva invariante à direita* $\operatorname{Lie}\Gamma$ *em G passando pelo ponto x.*

O análogo da proposição acima para o conjunto de atingibilidade é o seguinte:

Proposição 1.2 *Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ um sistema invariante à direita. Se x é um ponto arbitrário de G então:*

(i) $\mathbb{A}_\Gamma(x) = \{\exp(t_k A_k).\exp(t_{k-1}A_{k-1})\cdots\exp(t_1 A_1)x : A_i \in \Gamma, t_i \geqslant 0, k \in \mathbb{N}\}$

(ii) $\mathbb{A}_\Gamma(x) = \mathbb{A}(e)x$

(iii) $\mathbb{A}_\Gamma(e)$ *é um subsemigrupo de G*

(iv) $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ *é um subconjunto conexo por caminhos de G.*

Uma condição necessária de controlabilidade é dada na próxima proposição e é usualmente citada como *condição do posto*.

Teorema 1.3 *Uma condição necessária para que um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ seja controlável é que Γ gere $\mathfrak{g}$ como sua álgebra de Lie, isto é,* $\operatorname{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$. *Se* $\operatorname{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$ *então o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ tem interior não vazio no grupo G.*

Em geral, a condição do posto não é suficiente para controlabilidade, mas é equivalente à acessibilidade.

Teorema 1.4 *Um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é acessível na identidade (e portanto em qualquer ponto de G) se, e somente se,* $\operatorname{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$.

Dizemos que o *posto* de um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é *máximo* se a condição do posto é válida, ou seja, se $\operatorname{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$.

Em um sistema de posto máximo o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ tem interior não vazio em G. Em geral, a identidade e pode não pertencer ao interior de $\mathbb{A}$. Quando isto acontece obtemos uma das principais condições para a ocorrência da controlabilidade.

Teorema 1.5 *Um sistema invariante à direita Γ em um grupo de Lie conexo G é controlável se, e somente se, o elemento identidade e pertencer ao interior de $\mathbb{A}$.*

2. Saturado de Lie

Um método eficiente para obter condições suficientes para controlabilidade de sistemas invariantes à direita é a técnica de extensão baseada no cálculo do cone tangente do fecho do semigrupo de atingibilidade. Essa técnica é desenvolvida sistemáticamente em [6]. Nesta seção abordaremos o assunto com o intuito de estabelecer uma linguagem básica que nos possibilite fazer a demosntração do Teorema 3.3.

Definição 2.1 *Dois subconjuntos $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathfrak{g}$ são chamados equivalentes se* $\text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma_1}) = \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma_2})$.

Lema 2.2 *Se Γ_1 e Γ_2 são equivalentes a Γ então a união $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é equivalente a Γ.*

Demonstração: Como $\Gamma_1 \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ temos que $\mathbb{A}_{\Gamma_1} \subset \mathbb{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$. Assim $\text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma}) = \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma_1}) \subset \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})$. Por outro lado, se $y \in \mathbb{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$, então y é o produto intercalado de elementos de $\mathbb{A}_{\Gamma_1}$ e $\mathbb{A}_{\Gamma_2}$. Mas, cada elemento de $\mathbb{A}_{\Gamma_i}$ pertence a $\text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma})$ e, como $\mathbb{A}_{\Gamma}$ é semigrupo, temos que $y \in \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma})$. Assim $\mathbb{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \subset \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma})$ e $\text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}) \subset \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma})$. Portanto $\text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}) = \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma})$ mostrando que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é equivalente a Γ. $\square$

Uma consequência desse lema é a viabilidade da seguinte definição:

Definição 2.3 *Seja Γ um subconjunto de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O saturado de Lie de Γ, denotado por $\operatorname{Sat}(\Gamma)$ é o maior subconjunto de $\operatorname{Lie}\Gamma$ que é equivalente a Γ.*

Outra maneira de descrever o saturado de Lie de um subconjunto de $\mathfrak{g}$ é dada a seguir.

Teorema 2.4 *Para qualquer subconjnto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ temos*

$$\operatorname{Sat}(\Gamma) = \operatorname{Lie}\Gamma \cap \{A \in \mathfrak{g} : \exp(tA) \in \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma}),\ \forall t \geqslant 0\}.$$

Demonstração: Seja $\Gamma' = \{A \in \mathfrak{g} : \exp(tA) \in \text{fecho}(\mathbb{A}_{\Gamma}),\ \forall t \geqslant 0\}$. Observemos inicialmente que $\mathbb{A}_{\Gamma'} \subset \text{fecho}\,(\mathbb{A}_{\Gamma})$. Daí, $\text{fecho}\,(\mathbb{A}_{\Gamma'}) \subset \text{fecho}\,(\mathbb{A}_{\Gamma})$ e também, se $A \in \Gamma$ então $\exp\,(tA) \in \mathbb{A}_{\Gamma}$, $\forall t \geqslant 0$, isto é, $A \in \Gamma'$. Portanto $\Gamma \subset \Gamma'$. Logo

$\text{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma) \subset \text{fecho}\,(\mathbb{A}_{\Gamma'})$. Desta forma $\text{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma) = \text{fecho}\,\mathbb{A}_{\Gamma'})$, ou seja, Γ é equivalente a Γ'. Além disso vamos mostrar que $\text{Lie}\,\Gamma \cap \Gamma'$ é o maior subconjunto de $\mathfrak{g}$ que é equivalente a Γ. Para isto, suponhamos que Γ_1 seja um subconjunto de $\mathfrak{g}$ equivalente a Γ, isto é, $\text{fecho}\,(\mathbb{A}_{\Gamma_1}) = \text{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$. Se $A \in \Gamma_1$ então $\exp(tA) \in \mathbb{A}_{\Gamma_1} \subset \text{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)\ \forall t \geqslant 0$. Portanto $A \in \Gamma'$ e daí $\Gamma_1 \subset \Gamma'$. Sendo assim Γ' é o maior subconjunto de $\mathfrak{g}$ equivalente a Γ. Portanto, pela definição do saturado de Lie, temos que

$$\text{Sat}\,(\Gamma) = \text{Lie}\,\Gamma \cap \Gamma'.$$

□

Dado um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ denotemos por $E(\Gamma)$ o conjunto

$$\{A \in \text{Sat}\,(\Gamma) : -A \in \text{Sat}\,(\Gamma)\}$$

Não é difícil de mostrar que $E(\Gamma)$ é o maior subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ contido em $\text{Sat}\,(\Gamma)$. De fato, para mostrar que $E(\Gamma)$ é um subespaço vetorial basta demonstrar que, se $A, B \in E\,(\Gamma)$ então, $\exp(t(A+B)) \in \text{fecho}(\mathbb{A}_\Gamma)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$. Como $\exp(tA)$, $\exp(tB)$ pertencem ao $\text{fecho}(\mathbb{A}_\Gamma)$ e, conforme [17] Corolário 2.15.5,

$$\exp(t(A+B)) = \lim_{n\to\infty} (\exp(\frac{t}{n}A)\exp(\frac{t}{n}B))^n \qquad (1)$$

então $\exp(t(A+B)) \in \text{fecho}(\mathbb{A}_\Gamma)$.

Por outro lado, se F é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ contido em $\text{Sat}\,(\Gamma)$ e $A \in F$ então $-A \in F$. Logo $A, -A \in \text{Sat}\,(\Gamma)$ e, pela definição $A \in E\,(\Gamma)$. Isto mostra que $F \subset E\,(\Gamma)$.

As propriedades básicas do Saturado de Lie estão agrupadas na seguinte proposição:

Proposição 2.5

(*i*) $\text{Sat} \circ \text{Sat} = \text{Sat}$

(*ii*) $\text{Sat}\,(\Gamma)$ *é um cone positivo convexo fechado em* $\mathfrak{g}$*, isto é,*

(*a*) $\text{Sat}\,(\Gamma)$ *é topologicamente fechado:*

$$\text{fecho}\,(\text{Sat}\,(\Gamma)) = \text{Sat}\,(\Gamma)$$

(*b*) $\text{Sat}\,(\Gamma)$ *é convexo:*

$$A, B \in \text{Sat}\,(\Gamma) \Longrightarrow \alpha A + (1-\alpha)\,B \in \text{Sat}\,(\Gamma) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

(*c*) $\text{Sat}\,(\Gamma)$ *é um cone positivo:*

$$A, B \in \text{Sat}\,(\Gamma) \Longrightarrow \alpha A + \beta B \in \text{Sat}\,(\Gamma)\,, \forall \alpha, \beta \geqslant 0$$

(iii) Para todo $A \in E(\Gamma)$ e todo $t \in \mathbb{R}$

$$e^{t\,\mathrm{ad}(A)}\,\mathrm{Sat}\,(\Gamma) \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$$

(iv) $E(\Gamma)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Em particular

$$\pm A, \pm B \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma) \Longrightarrow \pm [A, B] \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$$

(v) Se $A \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ e se o subgrupo a um parâmetro $\{\exp(tA) : t \in \mathbb{R}\}$ é periódico então $\mathbb{R}A \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$.

Demonstração: (i) Dado um sistema Γ claramente $\Gamma \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Consequentemente $\mathrm{Sat}\,(\Gamma) \subset \mathrm{Sat}\,(\mathrm{Sat}\,(\Gamma))$. Por outro lado, por transitividade, $\mathrm{Sat}\,(\mathrm{Sat}\,(\Gamma))$ é equivalente a Γ. Como $\mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ é o maior subconjunto de $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ que é equivalente a Γ, então $\mathrm{Sat}\,(\mathrm{Sat}\,(\Gamma)) \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Assim temos a igualdade $\mathrm{Sat}\,(\mathrm{Sat}\,(\Gamma)) = \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ para qualquer sistema Γ.

$(ii)\,(a)$ Pelo Teorema 2.4

$$\mathrm{Sat}\,(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) \cap \{A \in \mathfrak{g} : \exp(tA) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma) \quad \forall t \geqslant 0\}.$$

Denotando o conjunto $\{A \in \mathfrak{g} : \exp(tA) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma) \quad \forall t \geqslant 0\}$ por Γ' temos que, se A_n é uma sequência em Γ' com $A_n \to A$ e $\exp(tA_n) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$, então $\lim_{n\longrightarrow\infty} \exp(tA_n) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$ uma vez que $\mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$ é fechado. Pela continuidade da aplicação exponencial $\exp(tA_n) \to \exp(tA) \quad \forall t \geqslant 0$ e portanto $\exp(tA) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$. Logo $A \in \Gamma'$ e assim Γ' é fechado. Como $\mathrm{Sat}\,(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) \cap \Gamma'$ concluímos que $\mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ é fechado.

$(ii)\,(b)$ Sejam $A, B \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ e $\alpha \in [0,1]$. Pelo Teorema 2.4 temos que $A, B \in \mathrm{Lie}\,(\Gamma)$ e $\exp(tA), \exp(tB) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma) \quad \forall t \geqslant 0$. Claramente $\alpha A + (1-\alpha)B \in \mathrm{Lie}\,(\Gamma)$, além disso, usando (1) temos

$$\exp t\,(\alpha A + (1-\alpha)B) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{n}\alpha A\right)\exp\left(\frac{t}{n}(1-\alpha)B\right)\right)^n.$$

Mas $\exp\left(\frac{t}{n}\alpha A\right)$,$\exp\left(\frac{t}{n}(1-\alpha)B\right) \in \mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$ e, como $\mathrm{fecho}\,(\mathbb{A}_\Gamma)$ é um semigrupo fechado,

$$\exp t\,(\alpha A + (1-\alpha)B) \in \mathrm{fecho}\,(A_\Gamma).$$

Portanto $(\alpha A + (1-\alpha)B) \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$.

$(ii)\,(c)$ Imediato a partir do Teorema 2.4 e (1).

(iii) Sejam $A \in E(\Gamma)$, $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Como $\pm A \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$, pela comutatividade dos diagramas,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "Ad"'] & End(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_\sigma"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "Ad_{\mathfrak{g}}"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

onde $I_\sigma(x) = \sigma x \sigma^{-1} \quad \forall x \in G$, temos:

$$\begin{aligned} \exp\left(se^{t\,\mathrm{ad}\,A}B\right) &= \exp\left(sAd_{\exp tA}B\right) \\ &= \exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA) \in \text{fecho}\left(\mathbb{A}_\Gamma\right) \end{aligned}$$

para todo $s \geqslant 0, t \in \mathbb{R}$. Assim $e^{t\,\mathrm{ad}\,A}B \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(iv) Como $E(\Gamma)$ é um subespaço vetorial então $\dfrac{e^{t\,\mathrm{ad}\,A}B - B}{t} \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$ para todo $t > 0$. Como $\mathrm{Sat}(\Gamma)$ é fechado então temos que

$$\pm[A,B] = \pm\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\,\mathrm{ad}\,A}B - B}{t} \in \mathrm{Sat}(\Gamma).$$

(v) Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ o período. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $t + kp = t' > 0$. Como $\exp(tA) = \exp(t + np)A \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ então $\exp(tA) = \exp(t' - kp)A = \exp(t'A) \in$ fecho$(\mathbb{A}_\Gamma)$. Desta forma $\mathbb{R}A \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$. □

O próximo teorema estabelece condições necessárias e suficientes para controlabilidade em termos do Saturado de Lie de um sistema.

Teorema 2.6 *Um sistema* $\Gamma \subset \mathfrak{g}$*, é controlável em um grupo de Lie conexo* G *se, e somente se,* $\mathrm{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{g}$.

Demonstração: Se Γ é controlável então $\mathbb{A}_\Gamma = G$ e portanto

$$\{A \in \mathfrak{g} : \exp(tA) \in \text{fecho}(\mathbb{A}_\Gamma)\} = \mathfrak{g}.$$

Assim, pelo Teorema 2.4, temos $\mathrm{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{g}$. Por outro lado se $\mathrm{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{g}$ então $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$ e, como $\mathrm{Sat}(\Gamma)$ é equivalente a Γ, temos que fecho$\left(\mathbb{A}_{\mathrm{Sat}(\Gamma)}\right) =$ fecho$(\mathbb{A}_\Gamma)$. Mas $\mathbb{A}_\mathfrak{g} = G$ e então fecho$(\mathbb{A}_\Gamma) = G$. Desta forma, como a condição do posto é válida e $\mathbb{A}_\Gamma$ é denso em G, o sistema Γ é controlável em G. □

Usualmente é difícil construir explicitamente o Saturado de Lie de um sistema invariante à direita. Por causa disto o Teorema 2.6 é aplicado como uma condição suficiente de controlabilidade através do seguinte procedimento: começando com um sistema Γ dado, construímos uma família ascendente completamente ordenada de extensões $\{\Gamma_\alpha\}$ de Γ, isto é, $\Gamma_0 = \Gamma, \quad \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta \quad se \quad \alpha < \beta$.

As regras das extensões são provenientes do Teorema 2.5:

1. dado Γ_α construímos $\Gamma_\beta =$ fecho$(co(\Gamma_\alpha))$
2. para $\pm A, B \in \Gamma_\alpha$ construímos $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup e^{\mathbb{R}\,\mathrm{ad}\,A}B$;
3. para $\pm A, \pm B \in \Gamma_\alpha$ construímos $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}[A,B]$;
4. dado $A \in \Gamma_\alpha$ com grupo a um parâmetro periódico construímos $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}A$.

O Teorema 2.5 garante que todas estas extensões pertecem a $\mathrm{Sat}(\Gamma)$. Se obtivermos a relação $\Gamma_\alpha = \mathfrak{g}$ em algum passo α então $\mathrm{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{g}$ e o sistema Γ é controlável.

3. O Teorema de Jurdjevic e Kupka

Nesta seção discutiremos controlabilidade de sistemas invariantes à direita em grupos de Lie semi-simples. O teorema de Jurdjevic e Kupka estabelece condições suficientes para a controlabilidade de uma família de sistemas bilineares do tipo $\dot{X} = (A + uB) X$ em grupos de Lie semi-simples. A demonstração deste teorema consiste primeiro em reduzir o problema ao caso de grupos de Lie simples e depois, através de uma série de manipulações dos espaços raízes associados às raízes de uma conveniente decomposição de Cartan da álgebra de Lie do grupo, mostrar que o saturado de Lie dos campos invariantes à direita A e B coincide com toda a álgebra de Lie. Consideraremos somente o caso particular em que o grupo de Lie semi-simples é o grupo $SL(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ com determinante igual a 1. Cabe esclarecer que, historicamente, foi assim que aconteceu: primeiro Jurdjevic e Kupka demonstraram o tal teorema em $SL(n, \mathbb{R})$ e posteriormente publicaram a demonstração geral [8]. Apresentaremos a demonstração do mesmo nos moldes em que originalmente foi feita.

Seja $B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e denotemos o polinômio característico de $Ad(B)$ por

$$P_B(\lambda) = \lambda^n + P_{n-1}(B)\lambda^{n-1} + \cdots + P_0(B).$$

B é chamado **regular** capo $P_i(B) \neq 0$, onde i é o posto de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, e **fortemente regular** caso seja regular e todo autovalor não nulo da $Ad(B)$ seja simples.

Na continuidade deste artigo denotaremos por B um elemento fortemente regular que possui autovalores reais distintos $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Além disso, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Conforme o usual, para (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant n$, E_{ij} denotará a matriz cuja única entrada não nula é igual a 1 e ocorre na posição (i, j). Se $p \neq q$ são inteiros distintos entre 1 e n, $\mathfrak{sl}(p, q)$ denotará a subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ gerada por E_{pq} juntamente com E_{qp}. Usaremos a notação $SL(p, q)$ para o grupo de Lie associado a $\mathfrak{sl}(p, q)$.

Começemos com o seguinte resultado:

Lema 3.1 *Sejam p e q inteiros distintos entre* 1 *e n. Se Γ é o cone positivo gerado por αE_{pq} e βE_{qp}, onde $\alpha\beta > 0$, então* $\mathrm{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{sl}(p, q)$ *e* $\mathbb{A}_\Gamma = SL(p, q)$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ onde $\lambda > 0$ e $\mu < 0$. Através de cálculos diretos obtemos que as entradas da matriz $x(t) = e^{tX}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} (x(t))_{11} &= (x(t))_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (\lambda\mu)^k \ ; \\ (x(t))_{12} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}\mu^k}{(2k+1)!} \ ; \\ (x(t))_{21} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \mu^{k+1}}{(2k+1)!} \ . \end{aligned}$$

Tomando $\omega = \sqrt{|\lambda\mu|}$ e observando que:

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)^k &= (-1)^k \omega^{2k} \\ \lambda^{k+1}\mu^k &= \sqrt{\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|} (-1)^k \omega^{2k+1} \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$ obtemos que

$$\begin{aligned} (x(t))_{11} &= (x(t))_{22} = \cos \omega t \\ (x(t))_{12} &= \sqrt{\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|} \sin \omega t \\ (x(t))_{21} &= \sqrt{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|} \sin \omega t \end{aligned} \tag{2}$$

No caso considerado se $X \in \Gamma$ então, $X = \lambda E_{pq} + \mu E_{qp}$, onde $\lambda\mu \leqslant 0$. Nesse caso as entradas da matriz e^{tX} referentes aos índices (q, q),(q, p),(p, q) e (p, p) serão, na sequência as expressões (2). O restante das entradas da diagonal principal será igual a 1 e as demais entradas serão nulas. Portanto

$$\begin{aligned} e^{tX} &= (\cos \omega t) E_{pp} + \left(\sqrt{\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|} \sin \omega t\right) E_{pq} - \\ &- \left(\sqrt{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|} \sin \omega t\right) E_{qp} + (\cos \omega t) E_{qq} + Id_{pq} \end{aligned}$$

onde I_{pq} é a matriz identidade do espaço $\oplus_{i \notin \{p,q\}} E_{ii}$.

Com isto, para λ e μ fixos o semigrupo $\left\{e^{tX} : t \geqslant 0\right\}$ é compacto, sendo portanto um subgrupo. Assim

$$\left\{e^{tX} : t \geqslant 0\right\} = \left\{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

Como isto ocorre para cada $X \in \Gamma$ temos em particular que $\mathbb{A}_\Gamma$ é um grupo. Como $\mathbb{A}_\Gamma$ é conexo por caminhos ele é um grupo de Lie.

Observemos agora, através de cálculos diretos, que

$$[E_{pq}, E_{qp}] = E_{pp} - E_{qq}$$

é diagonal. Então $\mathfrak{sl}(p, q)$ é uma álgebra tridimensional, assim como $\operatorname{Lie}\Gamma$. Portanto $\mathfrak{sl}(p, q) = \operatorname{Lie}\Gamma$. Além disso, como $\mathbb{A}_\Gamma$ é um grupo de Lie temos que $\operatorname{Sat}(\Gamma)$ é a álgebra de Lie de $\mathbb{A}_\Gamma$. Portanto $\operatorname{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{sl}(p, q)$ e $SL(p, q) = \mathbb{A}_\Gamma$. □

Necessitaremos também do seguinte lema técnico:

Lema 3.2 *Sejam a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} números reais tais que $|a_{11}| + |a_{22}| \neq 0$. Se $y_1 = \alpha a_{12} + \gamma a_{11}$ e se $y_2 = \delta a_{21} - \beta a_{22}$ então, existem números α, β, γ e δ com $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ satisfazendo $y_1 y_2 < 0$.*

Demonstração: Se $a_{21} = a_{12} = 0$ o resultado é imediato. Suponha então que $a_{12} \neq 0$, e seja $\alpha = \lambda a_{12} a_{22}$, $\beta = +\lambda$, $\gamma = -\frac{1}{\lambda}$ e $\delta = 0$. Para tal escolha de α, β, γ e δ,

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= (\alpha a_{12} + \gamma a_{11})(\delta a_{21} - \beta a_{22}) \\ &= a_{12} a_{21} + \beta\gamma (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) + \gamma\delta a_{11} a_{21} - \alpha\beta a_{12} a_{22} \\ &= a_{12} a_{21} - (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{21}) - \lambda^2 (a_{12} a_{21})^2 . \end{aligned}$$

Assim $y_1 y_2$ se torna negativo quando $\lambda \to \infty$. Se $a_{21} \neq 0$, seja $\delta = -\lambda a_{11} a_{21}$, $\beta = -\frac{1}{\lambda}$, $y = \lambda$ e $\alpha = 0$. Para uma tal escolha de α, β, γ e δ e com argumento análogo ao anterior mostra-se que $y_1 y_2$ se torna negativo para valores de λ suficientemente grandes. □

Teorema 3.3 (Jurdjevic e Kupka no $SL(n,\mathbb{R})$) *Sejam $A, B \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ elementos arbitrários tais que B é fortemente regular com autovalores reais e $A = (a_{ij})$ satisfaz:*

(i) $a_{ij} \neq 0$ para todo i, j tal que $1 \leqslant i, j \leqslant n$ tal que $|i - j| = 1$;

(ii) $a_{1n} a_{n1} < 0$.

Então o sistema $\Gamma = \{A + uB : u \in \mathbb{R}\}$ é controlável em $SL(n,\mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos demonstrar que $\mathrm{Sat}(\Gamma) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Para isto observemos inicialmente que, como $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ é gerado, como álgebra de Lie, pelas subálgebras $\mathfrak{sl}(i,j)$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$ então, basta demonstrar que $\mathfrak{sl}(i,j) \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Suponhamos que os autovalores de B são os números reais $b_1, b_2, \ldots, b_n$ e que $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Para cada par de inteiros (i,j) com $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, seja $\Delta_{ij} = b_i - b_j$ e $\Delta = \{\Delta_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$. Como $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$ então Δ é simétrico. Além disso, a correspondência $(i,j) \longmapsto \Delta_{ij}$ estabelece uma corespondência bijetora entre o conjunto $\mathbb{Z}_n = \{(i,j) : 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j\}$ e Δ. Para cada $(p,q) \in \mathbb{Z}_n$ seja

$$V^{(p,q)} = \bigoplus_{|\Delta_{ji}| \geq |\Delta_{pq}|} E_{ij}.$$

Vamos mostrar que $V^{(p,q)} \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$ e então, pela Proposição 2.5, $\mathrm{Lie}\left(V^{(p,q)}\right) \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$ e, desde que $\mathfrak{sl}(p,q) \subset \mathrm{Lie}\left(V^{(p,q)}\right)$ seguirá que $\mathfrak{sl}(p,q) \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Para provar que $V^{(p,q)} \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$ usaremos indução no conjunto dos elementos positivos de Δ. Primeiramente mostraremos que $V^{(n,1)} \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{A \pm nB}{n} = \pm B$. Logo $\pm B \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Pelo Teorema 2.5, como $A \in \Gamma$ e $e^{t \operatorname{ad} B} \mathrm{Sat}(\Gamma) \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$, temos que $e^{t \operatorname{ad} B} A \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e então,

$$A_v = e^{-Bv} A e^{Bv} \in \mathrm{Sat}(\Gamma) \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Desde que $\mathrm{Sat}(\Gamma)$ é cone positivo fechado

$$\lim_{v\to\infty} e^{-\Delta_{n1} v} A_v \in \mathrm{Sat}(\Gamma) .$$

Agora, $A = \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ implica que

$$\begin{aligned}
A_v &= e^{-Bv}Ae^{Bv} = \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-Bv}E_{ij}e^{Bv} \\
&= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\bigoplus_{k=1}^{n} e^{-b_k v E_{kk}}\right) E_{ij}\left(\bigoplus_{l=1}^{n} e^{-b_l v E_{ll}}\right) \\
&= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-b_i v}E_{ij}\left(\bigoplus_{l=1}^{n} e^{-\lambda_l v E_{ll}}\right) \\
&= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-\lambda_i v}e^{\lambda_j v}E_{ij} \\
&= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-(\lambda_i-\lambda_j)v}E_{ij} \\
A_v &= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-\Delta_{ij}v}E_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
e^{-\Delta_{n1}v}A_v &= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-\Delta_{n1}v}e^{-\Delta_{ij}v}E_{ij} \\
&= \bigoplus_{i,j=1}^{n} a_{ij}e^{-(\Delta_{n1}+\Delta_{ij})v}E_{ij}.
\end{aligned}$$

Mas $\Delta_{n1} + \Delta_{ij} = b_n - b_1 + b_i - b_j \geqslant 0$, é nulo se, e somente se, $n = i$ e $j = 1$. Portanto

$$\lim_{v\to\infty} e^{-\Delta_{n1}v}A_v = A_{n1}E_{n1} \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)\,.$$

Um argumento análogo aplicado ao limite

$$\lim_{v\to\pm\infty} e^{\Delta_{n1}v}A_v$$

mostra que $A_{1n}E_{1n} \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Portanto o cone positivo C gerado por $A_{1n}E_{1n}$ juntamente com $A_{n1}E_{n1}$ está contido em $\mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Pela hipótese (ii) temos $a_{n1}a_{1n} < 0$ e portanto, pelo Lema 3.1, $\mathrm{Sat}\,(C) = \mathfrak{sl}\,(1,n)$. Como $C \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ então $\mathfrak{sl}\,(1,n) \subset \mathrm{Sat}\,(C)$. Desde que $V^{(n,1)} \subset \mathfrak{sl}\,(1,n)$ temos que a hipótese de indução ocorre para o elemento maximal de Δ. Assumamos agora que a afirmação ocorra para todos os pares $(i,j) \in Z_n$ tal que $|\Delta_{ij}| \geqslant |\Delta_{pq}|$. Seja

$$\Delta_{lm} = m\acute{a}x\,\{\Delta_{ij} : \Delta_{ij} < |\Delta_{pq}|\}$$

É claro que $l > m$ pois Δ é simétrico. Precisamos mostrar que

$$V^{(l,m)} \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$$

Vamos analizar dois casos:

Caso I: $l < n$.

Neste caso, pela maximalidade de Δ_{lm} temos que $\Delta_{(l+1)m} \geqslant |\Delta_{pq}|$ e então pela hipótese de indução $V^{(l+1,m)} \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Desde que $\mathfrak{sl}\,(l+1,m) \subset \mathrm{Lie}\left(V^{(l+1,m)}\right)$ segue que $\mathfrak{sl}\,(l+1,m) \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Assumamos inicialmente que $\Delta_{(l+1)l} \geqslant |\Delta_{pq}|$. Neste caso, nossa hipótese de indução e um argumento análogo ao usado acima garantem que $\mathfrak{sl}\,(l+1,l) \subset \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Se $X \in \mathfrak{sl}\,(l+1,l)$ e se $g \in SL\,(l+1,m)$ então, pela Proposição 2.5, $Y = g^{-1}Xg \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$. Queremos escolher X e g tais que $y_{ml}y_{lm} < 0$. Se

$$X = x_{(l+1)l}E_{(l+1)l} + x_{l(l+1)}E_{l(l+1)}$$

e

$$g = \alpha E_{mm} + \beta E_{m(l+1)} + \gamma E_{(l+1)m} + \delta E_{(l+1)(l+1)} + Id_{(l+1)m} \quad \text{com } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

então, através de cálculos diretos obtemos que

$$y_{lm} = \gamma x_{l(l+1)} \quad \text{ e } \quad y_{ml} = -\beta x_{(l+1)l}.$$

Pelo Lema 3.2, podemos escolher X e g tais que

$$-\gamma x_{l(l+1)}\beta x_{(l+1)l} < 0.$$

Denotemos a projeção de $gl\,(n,\mathbb{R})$ em $V^{(p,q)}$ por $P^{(p,q)}$ e tomemos

$$A^{(m,l)} = Y - P^{(p,q)}\,(Y)$$

É claro que $A^{(m,l)} \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ e adicionalmente:

1. $\left(a^{(m,l)}\right)_{ij} = \left(a^{(m,l)}\right)_{ji} = 0$ para $(i,j) \in \mathbb{Z}_n$ tal que $|\Delta_{ij}| \geqslant |\Delta_{pq}|$;
2. $\left(a^{(m,l)}\right)_{lm}\left(a^{(m,l)}\right)_{ml} < 0$.

Agora, $A^{(m,l)} \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ e $B \in E\,(\Gamma)$ logo $e^{-Bv}A^{(m,l)}e^{Bv} \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma)$ e daí $e^{-\Delta_{lm}v}\left(e^{-Bv}A^{(m,l)}e^{Bv}\right) \in \mathrm{Sat}\,(\Gamma) \quad \forall v \in \mathbb{R}$.

Como $e^{-Bv}A^{(m,l)}e^{Bv} = \left(\left(a^{(m,l)}\right)_{ij}e^{(-b_i+b_j)v}\right)_{ij}$ temos

$$e^{-\Delta_{lm}v}\left(e^{-Bv}A^{(m,l)}e^{Bv}\right) = \left(\left(a^{(m,l)}\right)_{ij}e^{(b_m-b_l)-(b_i-b_j)v}\right)_{ij}.$$

Observemos que

$$\lim_{v\to\infty} e^{(b_m-b_l)-(b_i-b_j)v} = \begin{cases} 0 & \text{se } (b_m-b_l)-(b_i-b_j) < 0 \\ 1 & \text{se } (b_m-b_l)-(b_i-b_j) > 0, \end{cases}$$

pois para $(b_m - b_l) - (b_i - b_j) > 0$ temos $(b_m - b_l) > (b_i - b_j)$ daí $0 < b_l - b_m < b_j - b_i$ portanto, $|\Delta_{lm}| < |\Delta_{ji}|$ e pela definição de Δ_{lm} temos que $|\Delta_{ji}| \geqslant |\Delta_{pq}|$ e daí por (1) ocorre $\left(a^{(m,l)}\right)_{ij} = \left(a^{(m,l)}\right)_{ji} = 0$. Portanto

$$\lim_{v\to\infty} e^{-\Delta_{lm}v}\left(e^{-Bv}A^{(m,l)}e^{Bv}\right) = \left(a^{(m,l)}\right)_{lm}E_{lm}$$

Analogamente,

$$\lim_{v\to\infty} e^{-\Delta_{ml}v}\left(e^{-Bv}A^{(m,l)}e^{Bv}\right)=\left(a^{(m,l)}\right)_{ml}E_{ml}.$$

Portanto, $\left(a^{(m,l)}\right)_{lm}E_{lm}, \left(a^{(m,l)}\right)_{ml}E_{ml}\in \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Pelo lema 3.1 e por (2) segue que $\mathfrak{sl}(l,m)\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Pela definição de Δ_{lm} sabemos que se $|\Delta_{ij}|>|\Delta_{lm}|$ então $|\Delta_{ij}|\geqslant|\Delta_{pq}|$ e daí, pela hipótese de indução, $V^{(i,j)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Assim

$$V^{(l,m)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma).$$

Vamos agora considerar o caso em que $\Delta_{(l+1)l}<|\Delta_{pq}|$. Como antes, seja $P^{(p,q)}$ a aplicação projeção em $V^{(p,q)}$. Seja $X=A-P^{(p,q)}(A)$. Como $V^{(p,q)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$ então, pela hipótese do teorema $X_{l(l+1)}\neq 0$ e $X_{(l+1)l}\neq 0$. Novamente vamos escolher um elemento $g\in SL(l+1,m)$ tal que $Y=g^{-1}Xg$ satisfaça $Y_{ml}Y_{lm}<0$. Como no caso anterior seja g dado por α,β,γ e δ tais que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Temos que

$$\begin{aligned} y_{lm} &= \alpha x_{lm}+\gamma x_{l(l+1)}\\ y_{ml} &= \delta x_{ml}-\beta x_{(l+1)l}\end{aligned}$$

desde que $\left|x_{l(l+1)}\right|+\left|x_{(l+1)l}\right|\neq 0$ podemos aplicar o Lema 3.2 para obtermos α,β,γ e δ com $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ tais que $y_{ml}y_{lm}<0$. Para uma tal escolha seja

$$A^{(m,l)}=X-P^{(p,q)}(X)$$

Desde que X e $-P^{(p,q)}(X)\in \operatorname{Sat}(\Gamma)$ então $A^{(m,l)}\in \operatorname{Sat}(\Gamma)$ e daí $A^{(m,l)}$ satisfaz

1. $\left(a^{(m,l)}\right)_{ij}=0$ se $|\Delta_{ij}|\geqslant|\Delta_{pq}|$
2. $\left(a^{(m,l)}\right)_{ml}\left(a^{(m,l)}\right)_{lm}<0.$

Daí, seguindo exatamente o roteiro do caso anterior concluímos que

$$V^{(m,l)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma).$$

Caso II: $l=n$.

Nesse caso podemos supor $m>1$ pois já mostramos que $V^{(1,n)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Em vista da ordem usada segue que $\Delta_{l(m-1)}\geqslant|\Delta_{pq}|$. Então $V^{(l,m-1)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$ e portanto $sl(l,m-1)\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Repetindo então o argumento do caso I, com as mesmas escolhas, obteremos que $V^{(m,l)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Portanto $V^{(i,j)}\subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$ para todo $(i,j)\in\mathbb{Z}_n$ e isto completa a demonstração do teorema. □

As hipóteses do Teorema 3.3 são conhecidas na literatura como condições de Jurdjevic-Kupka para a controlabilidade de um sistema bilinear. Estas condições são suficientes mas não necessárias para a controlabilidade. Na verdade, as condições de Jurdjevic-Kupka fornecem uma família de exemplos de sistemas bilineares em $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ que são controláveis. Por exemplo, se

$$B=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

é um elemento não nulo de $sl(2;\mathbb{R})$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

então, caso $a_{12}\dot{a}_{21} < 0$ o sistema $\dot{x} = Ax + \mu Bx$ é controlável.

Referências

1. BRAGA BARROS, C.J.; RIBEIRO, J. G. F.; ROCIO, O.G. e SAN MARTIN, L.A.B.: Controllability of two-dimensional bilinear systems. *Proyecciones*, Vol. **15**, 2, 1996, 111-139.
2. BRANDÃO, B. M. S. *Controlabilidade de Sistemas Invariantes à Direita em Grupos de Lie.* Dissertação (Mestrado) - Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2001.
3. BROCKETT, R. W.: Systems theory on group manifolds and coset spaces, *SIAM J. on Control*, **10**, 1972, 265-284.
4. EL ASSOUDI, R. e GAUTHIER, J. P.: Controllability of right invariant systems on real simple Lie groups of type F_4, G_2, B_n e C_n, *Math. on Control signals systems*, Vol. **1**, 1988, 293-301.
5. GAUTHIER, J. P. e KUPKA, I. e SALLET, G.: Controllability of right invariant systems on real simple Lie groups, *Systems and Control Letters*, Vol. **5**, 1984, 187-190.
6. HILGERT, J.; HOFMANN, K. e LAWSON, J.: *Lie groups, convex cones and semigroups.* Oxford University Press, 1989.
7. JURDJEVIC, V.: *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
8. JURDJEVIC, V. e KUPKA, I.: Controllability of right invariant sistems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, Vol. **31** (4), 1981, 151-179.
9. JURDJEVIC, V. e KUPKA, I.: Control systems subordinated to a group action: Acessibility, *J. Differ. Equat.*, Vol. **39**, 1981, 186-211.
10. JURDJEVIC, V. e SUSSMANN, J. H.: Control Systems on Lie Groups, *Journal of Differential Equations*, Vol. **12**, 1972, 313-329.
11. LEITE, F. S. e CROUCH, P. E.: Controllability on classical Lie Groups, *Math. Control Signal Systems*, Vol. **1,** 1988, 31-42.
12. SACHKOV,YU. L.: *Controllability of invariant systems on Lie Groups and homogeneous spaces*, ISAS - International School for Advanced Studies, 1999.
13. SAN MARTIN, L.A.B.: Control sets and semigroups in semisimple Lie groups. *Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis*, Eds: Hofmann/Lawson/Vinberg. Walter de Gruyter, 1995.
14. — : Homogeneous spaces admitting transitive semigroups. *J. of Lie Theory*, Vol **8**, 1998, 111-128.
15. — : *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, SP, 1999.
16. SAN MARTIN, L.A.B. e TONELLI, P.A.: Semigroup actions on homogeneous spaces, *Semigroup Forum*, Vol. **14**, 1994, 1-30.
17. VARADARAJAN, V. S.: *Lie groups, Lie algebras and their representations.* Prentice Hall Inc., 1974.

Bernadete Maria Suaki Brandão
Departamento de Matemática,
Universidade Estadual de Maringá,
Av. Colombo, 5790,
CEP 87020-900, Maringá-Pr
E-mail: bmsbrandao@uem.br