Bol. Soc. Paran. Mat.
(3s.) **v. 22** 2 (2004): 145–156.

Algumas propriedades de funções pluriharmônicas [1]

Ludmila Bourchtein, Andrei Bourchtein

ABSTRACT: Neste artigo são analisadas funções harmônicas e pluriharmônicas no espaço complexo n-dimensional e a ligação entre elas. Utilizando os conceitos de funções C- e R-lineares, C- e R-diferenciáveis, são demonstradas algumas propriedades de funções pluriharmônicas.

Contents

1. Introdução

Uma função de duas variáveis reais *u(x,y)* que possui as derivadas parciais contínuas de segunda ordem numa região D no plano é chamada harmônica em D se em qualquer ponto dessa região ela satisfaz à equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Como é conhecido [3,9], as potenciais dos campos vetoriais importantes, considerados em física, são funções reais harmônicas de duas (ou três) variáveis reais e vice-versa. Sabemos que uma função real harmônica de duas variáveis reais é ligada fortemente com alguma função holomorfa de uma variável complexa. Por exemplo, uma função real harmônica de duas variáveis reais numa região D simplesmente conexa é a parte real (ou imaginária) de alguma função complexa $f(z)$, holomorfa em D [2,10]; a partir da função real harmônica de duas variáveis reais numa região D simplesmente conexa podemos reconstruir (com precisão de uma constante) a função complexa $f(z)$, holomorfa em D, de tal maneira que a função harmônica dada é a parte real (ou imaginária) de $f(z)$.

A função harmônica de n variáveis reais se define do mesmo modo da função de duas variáveis: é a função $u\,(x_1, ..., x_n)$ que possui as derivadas parciais contínuas de segunda ordem numa região $D \subset R^n$ e satisfaz nessa região à equação de Laplace:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

[1] Agradecemos o apoio da FAPERGS com a bolsa N0 01/60053.9
2000 *Mathematics Subject Classification:* 31C10, 32A17

Ao mesmo tempo, se considerarmos as funções holomorfas de n (n>1) variáveis complexas $f(z) = f(z_1, ..., z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in R$, $\forall k = 1, 2, ..., n$, e as funções harmônicas de $2n$ variáveis reais então a situação não é a mesma como para o caso da função holomorfa de uma variável complexa $f(z)$ e a função harmônica de duas variáveis reais. Entretanto, se considerarmos as funções pluriharmônicas em vez de harmônicas, certas propriedades válidas para n=1 podem ser restituídas. Por exemplo, a parte real e imaginária de uma função holomorfa numa região $D \subset C^n$ são funções pluriharmônicas nessa região; se uma função real $u(z)$ é pluriharmônica numa vizinhança do ponto $z^0 \in C^n$, então existe a função complexa $f(z)$, holomorfa no ponto z^0 , cuja parte real (ou imaginária) é igual a $u(z)$. Podemos mencionar, também, que o teorema de Liouville e o princípio de máximo são válidos para funções pluriharmônicas. Devido as suas propriedades, as funções pluriharmônicas são utilizadas em várias aplicações físicas e matemáticas, tais como, teoria de pluripotências, teoria geral da relatividade, problemas da mecânica quântica, teoria de equações diferenciais parciais, geometria pseudo-Hermitiana e outras [1,4,5,6,7,13].

Na parte restante dessa introdução relembramos algumas definições e resultados sobre funções C- e R-lineares, C- e R-diferenciáveis no espaço C^n , cujas propriedades serão utilizadas na análise de funções pluriharmônicas.

Definição 1.1. O espaço cujos pontos são conjuntos ordenados de n números complexos $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ é chamado o espaço complexo n-dimensional e é denotado por C^n.

Como $z_k = x_k + iy_k = x_k + ix_{n+k}$, $k = 1, 2, ..., n$, então os pontos do espaço complexo n-dimensional C^n são os pontos do espaço real euclidiano $2n$-dimensional R^{2n}. No espaço C^n são introduzidas a adição e a multiplicação por número complexo [2,12]:

$$1)\ z + w = (z_1 + w_1, ..., z_n + w_n),\ \forall z, w \in C^n,\ z = (z_1, ..., z_n),\ w = (w_1, ..., w_n);\ 2)\ \lambda z = (\lambda z_1, ..., \lambda z_n),\ \forall z \in C^n,\ \forall \lambda \in C,$$

isto é, C^n tem estrutura do espaço vetorial.

Em C^n pode ser definido o produto escalar de Hermite[12]:

$$(z, w) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k \tag{1}$$

para todos $z, w \in C^n$, $z = (z_1, ..., z_n)$, $w = (w_1, ..., w_n)$. Utilizando a representação dos números complexos na forma $z_k = x_k + ix_{n+k}$, $w_k = u_k + iu_{n+k}$, $k = 1, 2, ..., n$, temos de (1)

$$(z, w) = \sum_{k=1}^{2n} x_k u_k + i \sum_{k=1}^{n} (x_{n+k} u_k - x_k u_{n+k}) \tag{2}$$

De (1) e (2) segue que

$$(z, z) = \sum_{k=1}^{2n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = |z|^2 .$$

Esta é a norma euclidiana que coincide com a norma do vetor z no espaço R^{2n} [2,10].

Definição 1.2. A função l: $C^n \to C$ é chamada C-linear (R-linear) se:

$$\text{a) } l\left(z' + z''\right) = l\left(z'\right) + l\left(z''\right), \ \ \forall z', z'' \in C^n;$$
$$\text{b) } l\left(\lambda z\right) = \lambda l\left(z\right), \ \ \forall z \in C^n \, e \, \forall \lambda \in C \ \ (\forall \lambda \in R).$$

Afirmação 1.1. [12]. 1. Uma função l(z) é C-linear se, e somente se, essa função tem a forma

$$l\left(z\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k, \tag{3}$$

onde $a_k \in C$, $k = 1, 2, ..., n$ são alguns números complexos.

2. Uma função $l(z)$ é R-linear se, e somente se, ela é representada na forma

$$l\left(z\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k z_k + b_k \overline{z}_k\right), \tag{4}$$

onde a_k, b_k, $k = 1, 2, ..., n$ são alguns números complexos.

Afirmação 1.2. [12]. Uma função R-linear é a função C-linear se, e somente se

$$l\left(iz\right) = il\left(z\right), \ \ \forall z \in C^n. \tag{5}$$

Definição 1.3. [12]. Seja U vizinhança do ponto $z \in C^n$. A função $f : U \to C$ é chamada C-diferenciável (R-diferenciável) no ponto z, se

$$f\left(z + h\right) = f\left(z\right) + l\left(h\right) + o\left(h\right), \tag{6}$$

onde l é alguma função C-linear (R-linear) e $\frac{o(h)}{|h|} \to 0$ quando $h \to 0$. Com isso a função l é chamada a diferencial da função f no ponto z e é denotada *df*.

Colocamos $h = dz = \left(dz_1, ..., dz_n\right)$, $dz_k = dx_k + idy_k$, $k = 1, 2, ..., n$. No caso geral da função R-diferenciável podemos escrever a diferencial df na forma

$$df = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\, dy_k\right).$$

Passando às coordenadas complexas, temos

$$df = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\, dz_k + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\, d\overline{z}_k\right), \tag{7}$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \ \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \ \ k = 1, 2 ..., n. \tag{8}$$

Introduzindo os símbolos

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\, dz_k, \ \ \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\, d\overline{z}_k, \tag{9}$$

podemos reescrever a expressão (7) na forma

$$df = \partial f + \overline{\partial} f. \tag{10}$$

Afirmação 1.3. [12]. Uma função f R-diferenciável num ponto $z \in C^n$ é C-diferenciável neste ponto se, e somente se, é válida a condição

$$\overline{\partial} f = 0 \tag{11}$$

Utilizando as denotações (8) e (9) podemos reescrever a condição (11) da função C-diferenciável na forma

$$\overline{\partial} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\, d\overline{z}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) d\overline{z}_k = 0. \tag{12}$$

Como a igualdade (12) é válida para qualquer vetor $h = dz \in C^n,\ h \neq 0$, então de (12), temos [8,14]

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) = 0, \ \ \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{13}$$

Denotando $f = u{+}iv$, reescrevemos as igualdades (13) na forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y_k} + \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0\,, \ \ \forall k = 1, 2, ..., n,$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}\ , \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{14}$$

As igualdades (14) representam as condições de Cauchy-Riemann da função C-diferenciável num ponto. Notamos que para $n{>}1$ o sistema (14) é sobredeterminado.
Definição 1.4. Uma função f é chamada holomorfa num ponto $z \in C^n$ se ela é C-diferenciável numa vizinhança deste ponto.
Observação 1.1. Seja a função $f = u{+}iv$ holomorfa num ponto $z \in C^n$; então a função $\overline{f} = u - iv$ é R-diferenciável numa vizinhança deste ponto e da condições (13) temos

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_k} - i \frac{\partial \overline{f}}{\partial y_k} \right) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} \right)} = 0, \ \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Tais funções $\overline{f}$ são chamadas antiholomorfas no ponto z.

2. Funções pluriharmônicas

Seja a função $f = u{+}iv$ holomorfa num ponto $z \in C^n$; como é conhecido, $u{=}\frac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right)$. Segundo a observação 1.1 e utilizando as igualdades (15), temos

$$\frac{\partial u}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{16}$$

As derivadas parciais da função holomorfa também são funções holomorfas [2,12]; aplicando as igualdades (13) às funções $\frac{\partial f}{\partial z_m}$, $m = 1, 2, ..., n$, e usando as igualdades (16), temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_m \partial \overline{z}_k} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\left(\frac{\partial u}{\partial z_m}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\left(\frac{\partial f}{\partial z_m}\right) = 0, \ \forall k, m = 1, 2, ..., n. \tag{17}$$

Separando as partes real e imaginária do operador $\frac{\partial^2 u}{\partial z_m \partial \overline{z}_k}$ e usando as denotações (8)

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial}{\partial z_m} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} - i\frac{\partial}{\partial y_m}\right) = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} - i\frac{\partial}{\partial y_m}\right) +$$

$$+\frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} - i\frac{\partial}{\partial y_m}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_m}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial y_k} - \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial x_k}\right)$$

vemos que as condições (17) se desintegram em n^2 equações com as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_m} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_m} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial y_k} = 0\,, \ \forall k, m = 1, 2, ..., n\,. \tag{18}$$

Se usarmos os operadores (9) ∂ e $\overline{\partial}$, então podemos reescrever o sistema das equações (17), equivalente ao sistema (18), na forma de uma equação

$$\overline{\partial}\partial u = 0. \tag{19}$$

Definição 2.1.[12]. Seja D uma região no espaço C^n. Uma função $u(z_1, ..., z_n)$, que possui as derivadas parciais contínuas de segunda ordem na região D, é chamada pluriharmônica em D, se em qualquer ponto dessa região ela satisfaz à condição (19) (ou aos equivalentes sistemas (17) ou (18)).

Consideremos o sistema das equações (18). Escolhendo as primeiras dessas equações com índices $m{=}k$, somando para todos $k{=}1{,}2{,}...{,}n$ e lembrando que $z_k = x_k + iy_k = x_k + ix_{n+k}$, $\forall k = 1, 2, ..., n$, temos

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\right) = \sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,$$

isto é, qualquer função pluriharmônica é harmônica também. Notamos que a afirmação inversa nem sempre é verdadeira. Realmente, a função $u(z) = x_1 x_2 y_1 y_2$, $z = (z_1, z_2)$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ é harmônica em todo espaço complexo C^2, mas ela não é pluriharmônica em qualquer região deste espaço. Um outro exemplo simples é a função $u(z) = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2$.
Daqui temos que o conjunto das funções pluriharmônicas é um subconjunto das funções harmônicas no espaço C^n ou numa região deste espaço.

Afirmação 2.1. Seja D uma região em C^n. Assuma que a função $u(z) = u(z_1, ..., z_n)$ possui as derivadas parciais contínuas de segunda ordem em D. Seja $G_\omega = \left\{\zeta \in C : z^0 + \omega\zeta \in D\right\}$, onde $\omega \in C^n$ é algum vetor não nulo no espaço C^n

e $z^0 \in C^n$ é algum ponto fixo deste espaço. A função *u(z)* é pluriharmônica na região D se, e somente se, a sua restrição para qualquer reta complexa $z = z^0 + \omega\zeta$ é uma função harmônica no conjunto G_ω.

Demonstração: Antes de tudo notamos que G_ω, $\forall\omega \in C^n$, $\omega \neq 0$, é alguma região no plano complexo C. Realmente, o conjunto G_ω é aberto porque pela construção ele é a pré-imagem contínua da região $D \subset C^n$ [11]. Provaremos agora que a função $z = z^0 + \omega\zeta$ estabelece a correspondência biunívoca entre os pontos dos conjuntos $G_\omega \subset C$ e $D \subset C^n$. Realmente, para $\forall\zeta \in G_\omega$ corresponde um único ponto $z \in D$. Por outro lado, se existem os pontos $\zeta_1, \zeta_2 \in G_\omega$ tais que $z' = z^0 + \omega\zeta_1$, $z'' = z^0 + \omega\zeta_2$ *e* $z' = z''$, então temos que $\zeta_1 = \zeta_2$, isto é, para $\forall z \in D$ corresponde um único ponto $\zeta \in G_\omega$. Então existe a transformação inversa que também é contínua e por isso transforma a região D num conjunto conexo [11]. Assim, temos que o conjunto G_ω é aberto e conexo, isto é, G_ω é uma região no plano complexo.

Consideremos qualquer reta complexa em C^n [12]: $z = z^0 + \omega\zeta$, $\omega \in C^n$, $\omega \neq 0$, e a restrição de uma função $u(z)$ nessa reta, isto é, consideremos a função de uma variável complexa na região G_ω:

$$h(\zeta) = u\left(z^0 + \omega\zeta\right), \quad \zeta \in G_\omega.$$

Introduzimos as denotações

$$z = (z_1, ..., z_n)\,; \quad \omega = (\omega_1, ..., \omega_n)\,; \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Então, temos

$$z_k = z_k^0 + \omega_k\zeta, \quad \overline{z}_k = \overline{z}_k^0 + \overline{\omega}_k\overline{\zeta}, \quad \forall k = 1, 2, ..., n.$$

Calculamos as derivadas parciais de segunda ordem da função $h(\zeta)$ em qualquer ponto da região G_ω:

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial \overline{z}_k}{\partial \xi} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\omega_k + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}\overline{\omega}_k \right);$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial \overline{z}_k}{\partial \eta} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_k}i\omega_k - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}i\overline{\omega}_k \right);$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = \sum_{k,m=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m}\omega_k\omega_m + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m}\omega_k\overline{\omega}_m + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m}\overline{\omega}_k\overline{\omega}_m \right); \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = \sum_{k,m=1}^{n} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m}\omega_k\omega_m + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m}\omega_k\overline{\omega}_m - \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m}\overline{\omega}_k\overline{\omega}_m \right). \tag{21}$$

Somando (20) e (21), temos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = 4\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m}\omega_k\overline{\omega}_m. \tag{22}$$

Demonstração: Demonstraremos agora nossa afirmação 2.1. Se a função $u(z)$ é pluriharmônica na região D, então, da condição (17), temos que $\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} = 0$, $\forall k, m = 1, 2, ..., n$ em cada ponto da região D. Portanto, da igualdade (22) segue que $\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = 0$ em cada ponto da região G_ω, isto é, a função $h(\zeta) = u\left(z^0 + \omega\zeta\right)$ é harmônica na região $G_\omega \subset C$ para qualquer vetor fixo $\omega \in C^n$, $\omega \neq 0$.
Por outro lado, se a função $h(\zeta) = u\left(z^0 + \omega\zeta\right)$ é harmônica na região $G_\omega \subset C$, então da igualdade (22), temos

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} \omega_k \overline{\omega}_m = 0. \tag{23}$$

Como a condição (23) é válida para todos números complexos ω_k, $k = 1, 2, ..., n$, não iguais a zero simultaneamente ($\forall \omega \in C^n$, $\omega \neq 0$), então de (23) segue que $\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} = 0$, $\forall k, m = 1, 2, ..., n$, em cada ponto da região D [8,14], portanto, a função $u(z)$ é pluriharmônica na região D.

Afirmação 2.2. Uma função $u(z)$, $z \in C^n$, $u(0) = 0$, que possui as derivadas parciais contínuas de segunda ordem, é função R-linear se, e somente se, a sua restrição para qualquer plano real bidimensional em C^n é uma função harmônica.

Demonstração: Um plano real bidimensional em C^n tem a forma

$$z = z^0 + \omega\zeta + \omega'\overline{\zeta},$$

onde z^0 é um ponto fixo no espaço C^n, ω, $\omega' \in C^n$ são vetores não nulos simultaneamente e $\zeta \in C$ [12]. Como na afirmação 2.1 introduzimos a função $g(\zeta) = u\left(z^0 + \omega\zeta + \omega'\overline{\zeta}\right)$ de uma variável complexa $\zeta = \xi + i\eta$ e as denotações $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega' = (\omega'_1, ..., \omega'_n)$; a função $g(\zeta)$ é a restrição da função $u(z)$ no plano real bidimensional. Calculamos as derivadas parciais de segunda ordem da função $g(\zeta)$:

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_k} (\omega_k + \omega'_k) + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k} (\overline{\omega}_k + \overline{\omega'}_k) \right);$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_k} (i\omega_k - i\omega'_k) + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k} \left(-i\overline{\omega}_k + i\overline{\omega'}_k\right) \right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = \sum_{k,m=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} (\omega_k + \omega'_k)(\omega_m + \omega'_m) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} (\omega_k + \omega'_k)\left(\overline{\omega}_m + \overline{\omega'}_m\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} \left(\overline{\omega}_k + \overline{\omega'}_k\right)\left(\overline{\omega}_m + \overline{\omega'}_m\right) \right]; \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = \sum_{k,m=1}^{n} \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} (\omega_k - \omega'_k)(\omega_m - \omega'_m) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} (\omega_k - \omega'_k)\left(\overline{\omega}_m - \overline{\omega'}_m\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} \left(\overline{\omega}_k - \overline{\omega'}_k\right)\left(\overline{\omega}_m - \overline{\omega'}_m\right) \right]. \tag{25}$$

Somando as igualdades (24) e (25), temos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 4\sum_{k,m=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} \omega_k \omega'_m + \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} \left(\omega_k \overline{\omega}_m + \omega'_k \overline{\omega'}_m\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} \overline{\omega}_k \overline{\omega'}_m \right). \tag{26}$$

A necessidade da afirmação 2.2 é óbvia. Realmente, se $u(z)$ é uma função R-linear, então pela fórmula (4), temos

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} (a_k z_k + b_k \overline{z}_k).$$

Então,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} = 0, \quad \forall k, m = 1, 2, ..., n,$$

e de (26), segue que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0,$$

isto é, a função $g(\zeta)$ é harmônica.

Consideremos agora a suficiência da afirmação 2.2. Seja a função $g(\zeta) = u\left(z^0 + \omega\zeta + \omega'\overline{\zeta}\right)$ harmônica para todos vetores ω, $\omega' \in C^n$ não nulos simultaneamente. Então da igualdade (26) temos

$$\sum_{k,m=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} \omega_k \omega'_m + \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} \left(\omega_k \overline{\omega}_m + \omega'_k \overline{\omega'}_m\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} \overline{\omega}_k \overline{\omega'}_m \right) = 0. \tag{27}$$

Notamos que a igualdade (27) é válida para qualquer plano real bidimensional, isto é, para todos vetores ω, $\omega' \in C^n$ não nulos simultaneamente. Particularmente, escolhendo os vetores ω e ω' de seguinte modo: $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, onde $\omega_k = 1$, $\omega_m = 1$, $\omega_l = 0$, $\forall l \neq k, m$ (aqui está incluído também o caso quando $k = m$); $\omega' = 0$, isto é, $\omega'_k = 0$, $\forall k = 1, 2, ..., n$, obtemos da igualdade (27)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} = 0, \quad \forall k, m = 1, 2, ..., n. \tag{28}$$

Levando em consideração (28), a igualdade (27) recebe a forma

$$\sum_{k,m=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} \omega_k \omega'_m + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} \overline{\omega}_k \overline{\omega'}_m \right) = 0. \tag{29}$$

Escolhemos os vetores $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega' = (\omega'_1, ..., \omega'_n)$ de seguinte modo: primeira vez tomamos $\omega_k = 1,\ \omega_m = 0,\ \forall m \neq k;\ \omega'_m = 1,\ \omega'_k = 0,\ \forall k \neq m\ (\forall k, m = 1, 2, ..., n)$ e então obtemos de (29)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} + \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} = 0,\ \ \forall k, m = 1, 2, ..., n; \tag{30}$$

segunda vez tomando $\omega_k = 1,\ \omega_m = 0,\ \forall m \neq k;\ \omega'_m = i, \omega'_k = 0, \forall k \neq m$, temos de (29)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} - \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} = 0,\ \ \forall k, m = 1, 2, ..., n. \tag{31}$$

Das igualdades (30) e (31) obtemos seguintes condições para função $u(z) = u(z_1, ..., z_n)$ (lembramos também as igualdades (28)):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_m} = 0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_m} = 0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_m} = 0,\ \ \forall k, m = 1, 2, ..., n. \tag{32}$$

Das condições (32) e da condição $u(0) = 0$ segue que a função u é uma função linear em relação as variáveis z_k e $\overline{z}_k$, $\forall k = 1, 2, ..., n$:

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} (a_k z_k + b_k \overline{z}_k),$$

isto é, $u(z)$ é uma função R-linear.

Observação 2.1. Seja D uma região no espaço C^n; consideremos um plano complexo m-dimensional em C^n $(m < n)$

$$z = z^0 + \omega^1 \zeta_1 + \omega^2 \zeta_2 + ... + \omega^m \zeta_m,$$

onde $\omega^1, ..., \omega^m$ são alguns vetores fixos linearmente independentes no espaço C^n e $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_m)$ é um parâmetro complexo m-dimensional. Denotamos por

$$B = \left\{\forall \zeta \in C^m : z = z^0 + \omega^1 \zeta_1 + ... + \omega^m \zeta_m \in D\right\}.$$

Raciocinando analogamente como na afirmação 2.1, podemos obter a seguinte afirmação.

Afirmação 2.3. Uma função $u(z)$, que possui as derivadas parciais contínuas de segunda ordem numa região $D \subset C^n$, é pluriharmônica na região D se, e somente se, a sua restrição a qualquer plano complexo m-dimensional (m<n) é uma função pluriharmônica no conjunto B.

Demonstração: Antes de tudo notamos que o conjunto B, como a pré-imagem contínua da região $D \subset C^n$, é um conjunto aberto [11]. Consideremos neste conjunto a função de m variáveis complexas ($m < n$)

$$h(\zeta) = h(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = u\left(z^0 + \omega^1 \zeta_1 + \omega^2 \zeta_2 + \ldots \omega^m \zeta_m\right), \tag{33}$$

onde $\omega^j = \left(\omega_1^j, \ldots, \omega_n^j\right) \in C^n$, $j = 1, ..., m$. Calculamos as derivadas parciais de segunda ordem dessa função $h(\zeta)$ em qualquer ponto do conjunto B:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta_p \partial \bar{\zeta}_q} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} \omega_\nu^p \overline{\omega}_\mu^q, \quad \forall p, q = 1, 2, ..., m. \tag{34}$$

Se a função $u(z)$ é pluriharmônica na região D, então da definição segue que $\frac{\partial^2 u}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} = 0, \forall \nu, \mu = 1, 2, ..., n$. Portanto, de (34) temos $\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta_p \partial \bar{\zeta}_q} = 0, \forall p, q = 1, 2, ..., m$, isto é, a função $h(\zeta)$ é pluriharmônica no conjunto B.

Por outro lado, se a função (33) é pluriharmônica no conjunto B , então em qualquer ponto desse conjunto temos

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} \omega_\nu^p \overline{\omega}_\mu^q = 0, \quad \forall p, q = 1, 2, ..., m. \tag{35}$$

Lembramos que as igualdades (35) são válidas para quaisquer vetores linearmente independentes $\omega^1, ..., \omega^m \in C^n$. Por isso, obtemos de (35) que $\frac{\partial^2 u}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} = 0, \forall \nu, \mu = 1, 2, ..., n$ em qualquer ponto da região $D \subset C^n$, isto é, a função $u(z)$ é pluriharmônica na região D.

References

1. H.G.W. Begehr, A. Dzhuraev, An Introduction to Several Complex Variables and Partial Differential Equations (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol.88), Addison Wesley, London, 1997.
2. H. Cartan, Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables, Dover Pub., New York, 1995.
3. J.W. Dettman, Applied Complex Variables, Dover Pub., New York, 1984.
4. S. Dragomir, A survey of pseudo-Hermitian geometry, Proceedings of the Workshop on Differential Geometry and Topology (Palermo 1996), No.49, 101-112, 1997.
5. G.M. Khenkin, Several Complex Variables V: Complex Analysis in Partial Differential Equations and Mathematical Physics (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol.54), Springer-Verlag, Berlin, 1993.
6. M. Klimek, Pluripotential Theory, Oxford University Press, Oxford, 1991.
7. J.M. Lee, Pseudo-Einstein structures on *CR* manifolds, American Journal of Mathematics, Vol.110, 157-178, 1988.
8. S.J. Leon, Linear Algebra with Applications, Prentice Hall, University of Massachusetts, 2002.
9. Z. Nehari, Conformal Mapping, Dover Pub., New York, 1997.
10. W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1987.
11. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, New York,1976.
12. B.V. Shabat, Introduction to Complex Analysis. Part 2: Functions of Several Variables, American Mathematical Society, Providence, 1992.
13. M. Stoll, Invariant Potential Theory in the Unit Ball of C^n, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
14. G. Strang, Linear Algebra and its Applications, Harcourt Brace & Company, 1988.

Ludmila Bourchtein & Andrei Bourchtein
Instituto de Física e Matemática
Universidade Federal de Pelotas
Campus Universitário da UFPel
96010-900, Capão do Leão-RS, Brasil
burstein@terra.com.br