Bol. Soc. Paran. Mat.
(3s.) **v. 22** 2 (2004): 127–144.

O Teorema de Banach- Tarski

Luciano Panek

ABSTRACT: We will present in this work the curious and provocative Banach-Tarski Theorem: subsets of the three-dimensional Euclidean space with non-empty interior is part congruent, that is, one subset can be rearranged by isometries of a finite number of parts of the other. The proof, here (a free translation from Karl Stromberg's text, *American Mathematical Monthly*, 1979), is elegant and of elementary level, therefore accessible to the undergraduate student in Mathematics.

Contents

1. Introdução

Nestas notas apresentaremos o "paradoxal" teorema elaborado por Stefan Banach e Alfred Tarski[1] em 1924 ([4]). Os resultados necessários para a prova do teorema são de autoria de Karl Stromberg (1979, [12]). Estes resultados foram motivados pelo trabalho de A. M. Bruckner e Jack Ceder onde são discutidos os fenômenos de conjuntos não-mensuráveis ([3]). Acreditamos que a prova oferecida por Karl Stromberg é acessível aos estudantes de graduação que já têm conhecimento prévio em teoria dos grupos (nada muito além da definição), noções de conjuntos abertos, noções em teoria das matrizes (multiplicação, determinante),

2000 *Mathematics Subject Classification:* 04-01, 04A20

[1] **Notas Históricas.** Stefan Banach, juntamente com Norbert Wiener, deram contribuições importantes no começo da década de 1920-30 à origem da teoria moderna dos espaços vetoriais. Banach introduziu o conceito de espaços normados em 1923, sendo os espaços normados completos chamados de espaços de Banach. Já o lógico Alfred Tarski migrou da Alemanhã para os Estados Unidos na primavera de 1933 depois da ascensão de Hitler. Tarski, em 1948, no Massachusetts Institute of Technology, estabeleceu um novo campo dedicado ao estudo do controle e comunicação em animais e máquinas ([1]).

indução finita e teoria dos conjuntos (relações com imagem inversa de funções, relação de equivalência).

Teorema de Banach-Tarski. *Seja* $\overline{B}(0;r)$ *a bola fechada de centro* 0 *e raio* $r > 0$ *em* $\mathbb{R}^3$*, ou seja,*

$$\overline{B}(0;r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r\right\}.$$

Então exite uma partição finita de $\overline{B}(0;r)$ *que depois de rearranjada forma duas bolas fechadas idênticas a* $\overline{B}(0;r)$*.*

Como disse Karl Stromberg em [12]:

> "Isto parece ser patentemente falso, a menos que nos submetamos à tola prática de confundir os objetos "ideais" da geometria com os objetos "reais" do mundo ao nosso redor. Certamente, parece uma tolice dizer que uma bola de bilhar pode ser dividida em pedaços que podem ser reajuntados de modo a formar uma estátua de Banach em tamanho natural. Nós, é claro, não fazemos tal afirmação. Mesmo no mundo da matemática, este teorema é estonteante, embora verdadeiro".[2]

2. A prova do Teorema de Banach-Tarski

Evidentemente, o teorema de Banach-Tarski é surpreendente e por este motivo é esperado (e é) que sua prova não seja imediata. Optamos então por separar os conceitos preliminares em três seções iniciais, cada uma de acordo com uma grande área de concentração da Matemática: a Análise, a Geometria e a Álgebra. As demais seções são dedicadas a demonstração do teorema de Banach-Tarski.

2.1. Espaços Normados. Começamos pela definição de *métrica* que exprime nossa noção intuitiva de distância:

Definição 1 *Se* E *é um conjunto, diremos que uma função* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *é uma* métrica *se verifica as seguintes propriedades*:

(a) $d(x,y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in E$;

(b) $d(x,y) = 0$ *se e só se* $x = y$;

(c) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todo* $x, y \in E$;

(d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *para todo* $x, y, z \in E$.

Um espaço E junto com uma métrica d é chamado de *espaço métrico*.

[2] No original: "This seems to be patently false if we submit to the foolish practice of confusing the "ideal" objects of geometry with the "real" objects of the world around us. It certainly does seem to be folly to claim that a billiard ball can be chopped into pieces which can then be put back together to form a life-size statue of Banach. We, of course, make no such claim. Even in the world of mathematics, the theorem is astonishing, but true".

Definição 2 *Se E é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, então uma função $x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}$ é chamada de* norma *se verifica as seguintes propriedades*:

(a) $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in E$;

(b) $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $x \in E$;

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in E$.

Um espaço vetorial E junto com uma norma $\|\cdot\|$ é chamado de *espaço normado*.

Uma norma $\|\cdot\|$ no espaço vetorial E define uma métrica canônica em E:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Se E for completo em relação à métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, ou seja, toda seqüência de Cauchy[3] em E é convergente, então diremos que E é um *espaço de Banach*.

Sejam $a \in E$ e $r > 0$. A *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto

$$B_E(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}.$$

A *bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto

$$\overline{B}_E(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}.$$

A *esfera* de centro a e raio r é o conjunto

$$S_E(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}.$$

Se $a = 0$ e $r = 1$, escrevemos B_E, $\overline{B}_E$ e S_E em lugar de $B_E(a; r)$, $\overline{B}_E(a; r)$ e $S_E(a; r)$, respectivamente.

Um subconjunto $X \subset E$ é *limitado* se $X \subset \overline{B}_E(0; r)$ para algum $r > 0$. O *interior* de X, $int(X)$, é definido como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tal que $B_E(x; \varepsilon) \subset X$ para algum $\varepsilon > 0$.

Exemplo 1 *O exemplo que nos interessa é o espaço vetorial*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$$

com a soma e o produto por escalar usuais. Munimos $\mathbb{R}^n$ com a norma

$$\|x\| = \left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)^{1/2}.$$

Com esta norma, $\mathbb{R}^n$ torna-se um espaço de Banach. Também temos que

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|$$

[3] Uma seqüência (x_n) em E é dita de *Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ existir um n_o natural tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m > n_o$.

e

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$$

são normas de $\mathbb{R}^n$*, e* $\mathbb{R}^n$ *com qualquer uma das normas* $\|\cdot\|_1$ *ou* $\|\cdot\|_\infty$ *é espaço de Banach também. Na verdade as três normas acima são equivalentes, ou seja,*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty .$$

Observação 1 *Para o restante do trabalho fixamos a norma* $\|\cdot\|$ *e a métrica induzida* d *para* $\mathbb{R}^3$*.*

O espaço normado $\mathbb{R}^3$ está munido com o produto interno[4]

$$(x \mid y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

sendo $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Note agora que

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, ou seja, a norma é induzida pelo produto interno $(\cdot \mid \cdot)$.

Na teoria moderna dos espaços vetoriais, os espaços com produto interno que são completos em relação a norma induzida[5] pelo produto interno são chamados de *espaços de Hilbert*. Sendo assim, $\mathbb{R}^3$ com o produto interno $(\cdot \mid \cdot)$ é um espaço de Hilbert.

2.2. Isometrias do Espaço Euclidiano. Por *espaço euclidiano* entendemos ser o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno[6]

$$(x \mid y) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

sendo $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear. Se considerarmos duas bases $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e escrevermos

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

[4] Em geral, uma função $(\cdot \mid \cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ (E espaço vetorial real ou complexo, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é chamada de *produto interno* se: $(x_1 + x_2 \mid y) = (x_1 \mid y) + (x_2 \mid y)$; $(\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$; $\overline{(x \mid y)} = (y \mid x)$; $(x \mid x) \geq 0$; $(x \mid x) = 0$ se e só se $x = 0$.

[5] Nem sempre é verdade que uma norma $\|\cdot\|$ é induzida de um produto interno (por exemplo, a norma $\|\cdot\|_1$ definida acima). No entanto, se vale a *lei do paralelogramo* em E,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

para todo $x, y \in E$, então existe um produto interno no espaço que induz a norma original.

[6] Sejam E um espaço vetorial real ou complexo e $B : E \times \overline{E} \to \mathbb{C}$ uma aplicação bilinear. Se $B(x, y) = B(y, x)$, então a aplicação B é chamada de simétrica e a geometria do espaço (E, B) é chamada de *geometria ortogonal*; se $B(x, y) = -B(y, x)$, então a aplicação B é chamada de simplética e a geometria (E, B) é chamada de *geometria simplética*; se $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$, então a aplicação B é chamada de Hermitiana e a geometria (E, B) é chamada de *geometria Hermitiana*.

teremos a matriz $[\varphi]_{\beta'}^{\beta} = (a_{ij})_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ do operador φ relativa as bases β e β'. Se considerarmos outras bases α e α' de $\mathbb{R}^n$, teremos que a matriz $[\varphi]_{\alpha'}^{\alpha}$ estará associada a matriz $[\varphi]_{\beta'}^{\beta}$ através da igualdade

$$[\varphi]_{\alpha'}^{\alpha} = [\iota]_{\alpha'}^{\beta'} [\varphi]_{\beta'}^{\beta} [\iota]_{\beta}^{\alpha},$$

sendo $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador identidade (ver [2]). Note que $[\iota]_{\beta}^{\alpha}$ é a matriz mudança de base de α para β.

Exemplo 2 *Considere a seguinte aplicação $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(x)$ é exatamente a rotação de $120°$ do vetor x em torno do eixo z. É imediato que ψ é um operador linear. Se considerarmos a base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, teremos que*

$$\psi = [\psi]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note agora, como exemplo, que de fato o ângulo entre $(1,0,0)$ e $\psi(e_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ é $120°$, pois

$$\cos\theta = \frac{1\cdot(-1/2) + 0\cdot\left(\sqrt{3}/2\right) + 0\cdot 0}{\|(1,0,0)\|\cdot\left\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)\right\|} = -\frac{1}{2}$$

e $0 \le \theta \le 180°$ é o ângulo[7] *entre $(1,0,0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Também temos que*

$$\psi^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\psi^3 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3 *Fixe θ real. Seja agora $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear rotação de $180°$ em torno da reta $x\cos\frac{1}{2}\theta = z\sin\frac{1}{2}\theta$ no plano xz. Se considerarmos novamente a base canônica α teremos que*

$$\phi = [\phi]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Neste caso temos imediatamente que $\phi^2 = \iota$ (onde ι denota o operador identidade).

[7] Lembre da geometria analítica onde se mostra que se $0 \le \theta \le 180°$ é o ângulo entre os vetores (não-nulos) x e y em $\mathbb{R}^3$, então vale $\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Definição 3 *Uma* matriz ortogonal *é uma matriz quadrada com entradas reais tal que sua inversa é a sua transposta. Uma* rotação *é uma matriz ortogonal* 3×3 *cujo determinante é igual a* 1. *Uma* isometria (*ou* movimento rígido) *é uma aplicação* r *de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^3$ *da forma* $r(x) = \rho(x) + a$ *tal que* ρ *é uma rotação e* $a \in \mathbb{R}^3$ *é fixo.*

Nos exemplos anteriores, tanto ψ como ϕ são rotações (e portanto isometrias), já que $\det(\psi) = \det(\phi) = 1$, $\psi^{-1} = \psi^T$ e $\phi^{-1} = \phi^T$.

Listaremos agoras as propriedades que caracterizam as rotações (para a prova, ver [8]).

Proposition 2.1 *Seja* $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *uma rotação. Então*:

(*i*) *A imagem por* ρ *de uma reta é uma reta*: $\rho(x + ty) = \rho(x) + t\rho(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^3$ *e* $t \in \mathbb{R}$;

(*ii*) *O produto interno* $(\cdot \mid \cdot)$ *é preservado por* ρ; *se* $x, y \in \mathbb{R}^3$, *então*

$$(\rho(x) \mid \rho(y)) = (x \mid y);$$

(*iii*) *Distâncias são preservadas por* ρ : *se* $x \in \mathbb{R}^3$, *então* $\|\rho(x)\| = \|x\|$.

A afirmação (*i*) é óbvia e vale em geral para qualquer operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A terceira afirmação é conseqüência de (*ii*), já que $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

A palavra isometria[8] fica justificada porque todos operadores dessa classe preservam a métrica.

2.3. Grupo de Rotações. Considere agora as duas rotações

$$\psi = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \phi = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

estudadas anteriormente. Sabemos que

$$\psi^3 = \phi^2 = \iota$$

sendo ι a matriz identidade. Agora seja G o grupo gerado por ψ e ϕ, $G = \langle \psi, \phi \rangle$. Se $\rho \neq \iota$ é um elemento em G então sempre é possível escrever

$$\rho = \sigma_1 \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$$

com $n \geq 1$, sendo cada σ_i igual a ϕ, ψ ou ψ^2, e se $1 \leq j < n$, então exatamente um dos σ_j, σ_{j+1} é igual a ϕ. Tal expressão é chamada de *palavra reduzida* de ρ. Por exemplo, a expressão $\phi\psi^2\phi\phi\psi^2\phi$ não é uma palavra reduzida pois possui dois ϕ 's adjacentes, porém $\phi\psi^2\phi\phi\psi^2\phi$ é igual a palavra reduzida $\phi\psi\phi$. Cada elemento

[8] De maneira geral, uma *isometria* é uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nesse caso, prova-se que $\varphi(x) = T(x) + a$ sendo T uma aplicação linear ortogonal com $a \in \mathbb{R}^n$ fixo.

de G, distinto de ι, ϕ, ψ e ψ^2, pode ser representado por uma das quatro maneiras abaixo:

$$\begin{aligned}\alpha &= \psi^{p_1}\phi\psi^{p_2}\phi\ldots\psi^{p_m}\phi,\\ \beta &= \phi\psi^{p_1}\phi\psi^{p_2}\ldots\phi\psi^{p_m},\\ \gamma &= \phi\psi^{p_1}\phi\psi^{p_2}\ldots\phi\psi^{p_m}\phi\end{aligned}$$

e

$$\delta = \psi^{p_1}\phi\psi^{p_2}\phi\ldots\phi\psi^{p_m}$$

sendo $m \geq 1$ e $p_j = 1, 2$ (para δ, $m > 1$). Abstratamente podemos definir G através de uma apresentação finita[9], a saber $G = \langle g, h : g^3 = h^2 = 1\rangle$. Por ter esta apresentação, segue-se G tem infinitos elementos (ver [11]).

A unicidade da representação de uma palavra da forma reduzida no grupo $G = \langle\psi, \phi\rangle$ está ligada a escolha do número real θ. Se considerarmos $\theta = \pi$, por exemplo, teremos que

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e daí segue que $\psi\phi = \phi\psi^2$ e $\psi\phi\psi\phi = \iota$. Aqui temos um caso particular do problema da identificação de palavras reduzidas em grupos definidos por geradores e relações; a solução geral desse problema é desconhecida, mas para o nosso caso particular temos o seguinte resultado de autoria de Felix Hausdorff (1914, [7]), cuja prova pode ser encontrada em [12]:

Teorema 1 *Se $\cos\theta$ é um número transcendente[10], então cada elemento de G diferente de ι possui exatamente uma expressão como palavra reduzida em termos de ϕ, ψ e ψ^2. Isto é, se*

$$\sigma_1\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_n = \rho_1\rho_2\cdot\ldots\cdot\rho_m,$$

sendo ambos os lados da igualdade palavras reduzidas, então $m = n$ e $\sigma_j = \rho_j$ para todo inteiro $1 \leq j \leq n$.

Na prova do teorema de Hausdorff é usada algumas técnicas envolvendo polinômios especiais com coeficientes racionais juntamente com indução (nada difícil, mas extenso).

Agora fixamos um θ tal que $\cos\theta$ é transcendente. Isto é possível já que o conjunto dos números algébricos é enumerável e o intervalo $[-1, 1]$ da reta (que é a imagem da função cosseno) não é enumerável (ver [6]).

[9] A apresentação finita de um grupo não é única. A maneira de se obter outras apresentações apartir de uma dada é através das transformações de Tietze. O fato interessante é que apresentações de grupos isomorfos são obtidas uma das outras por transformações de Tietze (ver [9]).

[10] Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é *algébrico* se existir $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $p(X) \neq 0$, tal que $p(\alpha) = 0$. Caso contrário α é dito *transcendente*. Note que qualquer número racional é algébrico. Os números $\pi \approx 3.14$ e $e \approx 2.71$ são exemplos de números transcendentes [6].

Se $\rho = \rho_1 \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n$ é a expressão na forma reduzida de $\rho \in G$, então n é dito ser o *comprimento* de ρ, e escrevemos $n = l(\rho)$. Diremos também que ρ *começa* (ponto inicial) com ρ_1 e *termina* (ponto final) com ρ_n.

Teorema 2 *Seja $G = \langle \phi, \psi \rangle$ o grupo gerado pelas rotações ϕ e ψ definidas anteriormente. Então existe uma partição $\{G_1, G_2, G_3\}$ de G em três subconjuntos não vazios tal que para cada $\rho \in G$ tem-se que:*

(i) *$\rho \in G_1$ se, e somente se, $\phi\rho \in G_2 \cup G_3$;*

(ii) *$\rho \in G_1$ se, e somente se, $\psi\rho \in G_2$;*

(iii) *$\rho \in G_1$ se, e somente se, $\psi^2\rho \in G_3$.*

Demonstração Reescreveremos para conveniência do leitor a prova dada por Stromberg (ver [12, Theorem B]).

A partição será construída indutivamente distribuindo os elementos de G de acordo com os seus comprimentos. Inicialmente coloque

$$\iota \in G_1,\ \phi \in G_2,\ \psi \in G_2,\ \psi^2 \in G_3.$$

Suponha agora que para algum natural $n \geq 1$ todo $\sigma \in G$ com $l(\sigma) \leq n$ esteja contido em exatamente um dos G_1, G_2, G_3. Se $l(\sigma) = n$ e σ começa em ψ ou ψ^2, coloque

$$\phi\sigma \in G_2 \text{ se } \sigma \in G_1, \tag{1}$$

$$\phi\sigma \in G_1 \text{ se } \sigma \in G_2 \cup G_3. \tag{2}$$

Se $l(\sigma) = n$ e σ começar em ϕ, coloque

$$\psi\sigma \in G_{j+1} \text{ se } \sigma \in G_j, \tag{3}$$

$$\psi^2\sigma \in G_{j+2} \text{ se } \sigma \in G_j \tag{4}$$

para $j = 1, 2, 3$, sendo $G_4 = G_1$ e $G_5 = G_2$. Assim construímos indutivamente[11] uma partição $\{G_1, G_2, G_3\}$ de G.

A prova de que $\{G_1, G_2, G_3\}$ satisfaz as equivalências $(i), (ii), (iii)$ também é feita usando indução finita. Suponha então que para algum $n > 1$ natural todas as equivalências acimas são verdadeiras sempre que $l(\rho) < n$, $\rho \in G$. Seja agora $\rho \in G$ tal que $l(\rho) = n$.

(1° *caso*) Suponha que ρ comece com ϕ. Então (3) e (4), com $\sigma = \rho$, implica (ii) e (iii), respectivamente. De fato, dado que σ começa com ϕ, pelas regras de definição de G_1, G_2 e G_3, a única possibilidade para que $\psi\sigma$ esteja em G_2 é dada por (3), quando σ está em G_1. De maneira análoga prova-se a segunda implicação. Como $l(\phi\rho) = n - 1$, então (usando a hipótese de indução) ρ não pertence a G_1

[11] A distribuição de cada elemento de comprimento n é determinada por n etapas; por exemplo, se $\rho = \psi\phi\psi\phi\psi^2\phi\psi^2$, então temos que $\psi^2 \in G_3$, $\phi\psi^2 \in G_1$, $\psi^2\phi\psi^2 \in G_3$, $\phi\psi^2\phi\psi^2 \in G_1$, $\psi\phi\psi^2\phi\psi^2 \in G_2$, $\phi\psi\phi\psi^2\phi\psi^2 \in G_1$, $\rho \in G_2$.

se, e somente se, $\phi(\phi\rho)$ pertence a $G_2 \cup G_3$, que é equivalente a $\phi\rho$ estar em G_1. Daí segue que $\phi\rho$ não pertence a $G_2 \cup G_3$, donde temos que (i) vale neste caso.

(2° *caso*) Suponha que ρ comece com ψ. Então (i) segue de (1) e (2) com $\sigma = \rho$. Temos agora que $\psi\rho = \psi^2\sigma$ sendo $l(\sigma) = n-1$ e σ começando com ϕ (caso contrário ρ começaria com ψ^2 ou ϕ); de (3) e (4) temos que $\psi\rho = \psi^2\sigma \in G_2$ se, e somente se, $\sigma \in G_3$, o que é equivalente a $\rho = \psi\sigma \in G_1$. Mas $\rho = \psi\sigma \in G_1$ se, e somente se, $\psi^2\rho = \sigma \in G_3$, donde segue que (ii) e (iii) valem neste caso.

(3° *caso*) Suponha que ρ comece com ψ^2. Aqui também (i) segue de (1) e (2). Temos agora que $\psi\rho = \sigma$ onde $l(\sigma) = n-1$ e σ começa com ϕ (caso contrário ρ começaria com ϕ ou ψ); de (3) e (4) temos que $\psi\rho = \sigma \in G_2$ é equivalente a $\rho = \psi^2\sigma \in G_1$, que por sua vez é equivalente a $\sigma \in G_2$. Como σ pertence a G_2 se, e somente se, $\psi^2\rho = \psi\sigma$ pertence a G_3, segue que as equivalências (ii) e (iii) valem também neste caso. □

2.4. Partições de Esferas.

Definição 4 *Dois subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^3$ são ditos* congruentes*, e escrevemos $X \cong Y$, se existir uma isometria r tal que $r(X) = Y$.*

Diremos $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ é uma *partição* de X em n subconjuntos se

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \text{ e } X_i \cap X_j = \varnothing \text{ se } i \neq j.$$

É permitido que algum ou todos os X_i sejam vazios.

Daqui em diante S denotará a esfera unitária $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\right\}$.

Teorema 3 *Seja S a esfera unitária. Então existe uma partição $\{P, S_1, S_2, S_3\}$ de S tal que*:

(i) *P é enumerável*;

(ii) $\phi(S_1) = S_2 \cup S_3$;

(iii) $\psi(S_1) = S_2$;

(iv) $\psi^2(S_1) = S_3$.

Demonstração Seja $P = \{p \in S : \rho(p) = p \text{ para alguma } \rho \in G,\, \rho \neq \iota\}$, ou seja, P é o conjunto dos pontos da esfera unitária que são fixos por alguma rotação não trivial de G. Cada $\rho \neq \iota$ de G possui exatamente dois pontos fixos em S (os polos do eixo de rotação), e sendo G enumerável[12] concluímos que P é enumerável, donde temos (i). Para cada $x \in S \backslash P$, seja $G(x) = \{\rho(x) : \rho \in G\}$, a *órbita* de x por G. Temos que[13] $G(x)$ é um subconjunto de $S\backslash P$, $x \in G(x)$, e $G(x) \cap G(y)$ é disjunto

[12] Os elementos de G são concatenações finitas de elementos do conjunto finito $\{\phi, \psi\}$.

[13] Se existir $\rho \in G$ tal que $\rho(x) \in P$, então existe $\sigma \in G$, $\sigma \neq \iota$, tal que $\sigma\rho(x) = \rho(x)$, daí $\rho^{-1}\sigma\rho(x) = x$, donde temos que $x \in P$; $x = \iota(x)$; se $t \in G(x) \cap G(y)$, então $t = \rho(x) = \sigma(y)$, e se $z \in G(x)$, digamos $z = \tau(x)$, então $z = \tau\rho^{-1}(t) = \tau\rho^{-1}\sigma(y) \in G(y)$, ou seja, se $G(x) \cap G(y) \neq \varnothing$ então $G(x) = G(y)$.

ou idêntico. Concluímos então que $\mathcal{F} = \{G(x) : x \in S\backslash P\}$ é uma partição de $S\backslash P$. Escolha agora um ponto em cada conjunto de $\mathcal{F}$, e denotemos por C o conjunto de tais pontos[14]. O conjunto C possui as seguintes propriedades:

$$C \subset S\backslash P, \tag{5}$$

$$c_1 \neq c_2 \text{ em } C \text{ então } G(c_1) \cap G(c_2) = \varnothing, \tag{6}$$

$$x \in S\backslash P \text{ então } x \in G(c) \text{ para algum } c \in C. \tag{7}$$

Agora defina $S_j = G_j(C) = \{\rho(c) : \rho \in G_j, c \in C\}$ para $j = 1, 2, 3$ onde G_1, G_2, G_3 são ofertados no Teorema 2. Usando (5) e o fato de que $G(x) \subset S\backslash P$ se $x \in S\backslash P$, temos que $S_j \subset S\backslash P$ para cada j. Os fatos de que $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ e (7) mostram que $S\backslash P = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. O item (6) garante[15] que $S_i \cap S_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Disto tudo segue que $\{P, S_1, S_2, S_3\}$ é uma partição de S.

Finalmente, aplicando $(i), (ii), (iii)$ do Teorema 2, teremos que

$$\phi(S_1) = \{\phi\rho(c) : \rho \in G_1, c \in C\} = \{\tau(c) : \tau \in G_2 \cup G_3, c \in C\} = S_2 \cup S_3,$$

$$\psi(S_1) = \{\psi\rho(c) : \rho \in G_1, c \in C\} = \{\tau(c) : \tau \in G_2, c \in C\} = S_2,$$

$$\psi^2(S_1) = \left\{\psi^2\rho(c) : \rho \in G_1, c \in C\right\} = \{\tau(c) : \tau \in G_3, c \in C\} = S_3$$

o que prova $(ii), (iii)$ e (iv). □

O seguinte lema e suas aplicações nos resultados a seguir são contribuições de W. Sierpiński (ver [13]).

Lema 1 *Se P é um subconjunto enumerável de S, então existe um conjunto enumerável Q e uma rotação ω tal que $P \subset Q \subset S$ e $\omega(Q) = Q\backslash P$.*

A idéia para a prova do lema é simples. Primeiro fixe um eixo de rotação para ω que não contém nenhum ponto de P (se isto não fosse possível, então P não seria enumerável). Agora escolha um ângulo de rotação para ω tal que $P \cap \omega^n(P) = \varnothing$ para todo $n \geq 1$ natural (se isto não fosse possível, então $P \times P \times \mathbb{N}$ não seria enumerável). Coloque então $Q = P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$.

Um resultado "análogo", conhecido pelos estudantes de graduação, pode ser citado como exemplo: $\mathbb{N}$ e $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ são enumeráveis e existe uma função bijetiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\backslash P$, a saber, $f(x) = 2x + 1$.

---

[14] A garantia de que tal conjunto C existe é dada pelo *Axioma da Escolha*: seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos disjuntos não vazios; então existe um conjunto S tal que $S \cap X_i$ tem um único elemento para cada $i \in I$. Sabe-se que o axioma da escolha, o lema de Zorn e o teorema de Zermelo são afirmações equivalentes.

[15] Se $x \in S_i \cap S_j$, $i \neq j$, então $x = \rho(c_1) = \sigma(c_2)$ para algum $c_1, c_2 \in C$, $\rho \in S_i$, $\sigma \in S_j$, daí $c_1 = c_2 = c$ e $\sigma^{-1}\rho(c) = c$ com $c \notin P$, donde segue que $\sigma^{-1}\rho = \iota$ e $\rho = \sigma$, contrariando $G_i \cap G_j = \varnothing$.

Teorema 4 *Existe uma partição da esfera unitária* S

$$\{T_i : 1 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{N}\}$$

e um correspondente conjunto $\{\rho_i : 1 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{N}\}$ *de rotações tal que*

$$\{\rho_i (T_i) : 1 \leq i \leq 6, i \in \mathbb{N}\}$$

é uma partição de S *e*

$$\{\rho_i (T_i) : 7 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{N}\}$$

é outra partição de S*.*

Demonstração Mantendo as notações, sejam

$$\begin{aligned} U_1 &= \phi (S_2), U_2 = \psi\phi (S_2), U_3 = \psi^2\phi (S_2), \\ V_1 &= \phi (S_3), V_2 = \psi\phi (S_3), V_3 = \psi^2\phi (S_3). \end{aligned}$$

Do Teorema 3 segue que $\{U_j, V_j\}$ é uma partição de S_j para $j = 1, 2, 3$, e juntando os seis conjuntos acima com o conjunto P teremos uma partição de S em sete subconjuntos. Antes de estabelecermos $T_1, \ldots, T_6$, definiremos

$$\begin{aligned} T_7 &= U_1,\ T_8 = U_2,\ T_9 = U_3,\ T_{10} = P, \\ \rho_7 &= \psi^2\phi,\ \rho_8 = \phi\psi^2,\ \rho_9 = \psi\phi\psi,\ \rho_{10} = \iota. \end{aligned}$$

Então temos que $\rho_{10} (T_{10}) = P$ e $\rho_j (T_j) = S_{j-6}$ para $j = 7, 8, 9$ e de fato $\{\rho_i (T_i) : 7 \leq i \leq 10\}$ é uma partição de S. Particionaremos agora o conjunto $S \backslash (T_7 \cup T_8 \cup T_9 \cup T_{10}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ em seis partes. Seja Q e ω dados pelo lema de Sierpiński e defina

$$\begin{aligned} T_1 &= \rho_8 (S_1 \cap Q), T_2 = \rho_9 (S_2 \cap Q), T_3 = \rho_7 (S_3 \cap Q), \\ T_4 &= \rho_8 (S_1 \backslash Q), T_5 = \rho_9 (S_2 \backslash Q), T_6 = \rho_7 (S_3 \backslash Q). \end{aligned}$$

Imediatamente temos que $\{T_1, T_4\}$ é uma partição para $\rho_8 (S_1) = V_1$, $\{T_2, T_5\}$ é uma partição de $\rho_9 (S_2) = V_2$, $\{T_3, T_6\}$ é uma partição de $\rho_7 (S_3) = V_3$, e $\{T_i : 1 \leq i \leq 10\}$ é uma partição de S. Agora seja

$$\rho_4 = \rho_8^{-1}, \rho_5 = \rho_9^{-1}, \rho_6 = \rho_7^{-1} \text{ e } \rho_j = \omega^{-1}\rho_{j+3}$$

para $j = 1, 2, 3$. É claro que

$$\rho_{j+3} (T_{j+3}) = S_j \backslash Q,\ j = 1, 2, 3,$$

e, como $P \subset Q$, a união destes três conjuntos é $S \backslash Q$. Finalmente, temos que

$$\rho_j (T_j) = \omega^{-1}\rho_{j+3} (T_j) = \omega^{-1} (S_j \cap Q),\ j = 1, 2, 3,$$

são três conjuntos disjuntos cuja união é $\omega^{-1} (Q \backslash P) = Q$. □

Para $T \subset S$, S a esfera unitária, definimos $T' = \{tx : x \in T, 0 < t \leq 1\}$. Assim S' nada mais é do que a bola $\overline{B}_{\mathbb{R}^3}$ menos a origem $(0,0,0)$. Note agora que o Teorema 4 nos garante também a existência de uma partição $\{T'_i : 1 \leq i \leq 10\}$ de S' nas mesmas condições.

A bola fechada $\overline{B}_{\mathbb{R}^3}$ será denotada por $\overline{B}$.

Teorema 5 *Seja $\overline{B}$ a bola fechada unitária. Então existe uma partição*

$$\{B_i : 1 \leq i \leq 40, i \in \mathbb{N}\}$$

de $\overline{B}$ e um correspondente conjunto $\{r_i : 1 \leq i \leq 40, i \in \mathbb{N}\}$ de isometrias tal que

$$\{r_i (B_i) : 1 \leq i \leq 24, i \in \mathbb{N}\}$$

é uma partição de $\overline{B}$ e

$$\{r_i (B_i) : 25 \leq i \leq 40, i \in \mathbb{N}\}$$

é outra partição de $\overline{B}$.

Demonstração Aplique o Lema 1 no caso em que $P = \{u\}$, sendo $u = (1,0,0) \in S$, para obter uma conjunto enumerável Q e uma rotação ρ_0 tais que $u \in Q \subset S$ e $\rho_0 (Q) = Q \backslash \{u\}$. Coloque $N_1 = \left\{\frac{1}{2}(q-u) : q \in Q\right\}$ e defina a isometria r_0 pondo

$$r_0 (x) = \rho_0 \left(x + \frac{1}{2}u\right) - \frac{1}{2}u.$$

Da definição de ρ_0 e N_1 temos que $0 \in N_1$ e $r_0 (N_1) = N_1 \backslash \{0\}$. Escreva $N_2 = \overline{B} \backslash N_1$, $s_1 = r_0$, $s_2 = \iota$, e $M_h = s_h (N_h)$ para $h = 1,2$. Temos então que $\{N_1, N_2\}$ é uma partição de $\overline{B}$ e $\{M_1, M_2\}$ é uma partição de $S' = \overline{B} \backslash \{0\}$. A prova segue agora combinando as partições e isometrias acima com a partição $\{T'_i : 1 \leq i \leq 10\}$ de S' e as rotações $\{\rho_i : 1 \leq i \leq 10\}$ ofertadas pelo Teorema 4 à S'.

Inicialmente note que $\left\{T'_j \cap \rho_j^{-1} (M_i) : i = 1,2\right\}$ particiona T'_j para cada $j = 1,2,\ldots,10$. Também $\left\{M_h \cap T'_j \cap \rho_j^{-1} (M_i) : h = 1,2\right\}$ particiona $T'_j \cap \rho_j^{-1} (M_i)$ para cada $i = 1,2$. Assim

$$\left\{M_h \cap T'_j \cap \rho_j^{-1} (M_i) : 1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 10\right\}$$

é uma partição de S' em quarenta subconjuntos, e os quarenta conjuntos

$$B_{hij} = s_h^{-1} \left(M_h \cap T'_j \cap \rho_j^{-1} (M_i)\right)$$

formam uma partição de $\overline{B}$ onde para cada j fixo, os quatro conjuntos

$$\rho_j s_h (B_{hij}) = M_i \cap \rho_j \left(M_h \cap T'_j\right), \tag{8}$$

com $1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2$, formam uma partição de $\rho_j \left(T'_j\right)$. Como

$$\{T'_j \cap \rho_j^{-1} (M_i) : i = 1,2; j = 1,2,\ldots,10\}$$

particiona S' então existe um par ij tal que $r_0(0) \in T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)$ (lembre que $r_0(0) \neq 0$). Assim, para tal par ij, temos que B_{1ij} é o conjunto da partição $\{B_{hij}\}$ de $\overline{B}$ que cobre a origem:

$$B_{1ij} = s_1^{-1}\left(M_1 \cap T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)\right) = r_0^{-1}(M_1) \cap r_0^{-1}(T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)),$$

$$0 \in N_1 \subset r_0^{-1}(M_1),\ 0 \in r_0^{-1}(T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)).$$

O Teorema 4 nos mostra que

$$\{\rho_j s_h(B_{hij}) : 1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

e

$$\{\rho_j s_h(B_{hij}) : 1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 7 \leq j \leq 10\}$$

são partições de S' onde, para cada i fixo, (8) nos mostra que as respectivas famílias com doze e oito conjuntos são cada uma partições de M_i que via a aplicação s_i^{-1} se tornam partições de N_i. Consequentemente, escrevendo $r_{hij} = s_i^{-1}\rho_j s_h$, deduzimos que

$$\{r_{hij}(B_{hij}) : 1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

e

$$\{r_{hij}(B_{hij}) : 1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 7 \leq j \leq 10\}$$

são partições de $\overline{B}$ em vinte e quatro e dezesseis conjuntos respectivamente, sendo $\{r_{hij} : 1 \leq h \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 10\}$ a família das quarenta isometrias requeridas. □

O número 40 no teorema acima pode ser reduzido. Este fato foi provado em 1947 por R. M. Robertson ([10]). Robertson mostrou que existe uma partição da bola fechada unitária em cinco conjuntos que através de isometrias são levados e formam duas bolas fechadas unitárias disjuntas. Em 1956 ([5]), T. J. Dekker e J. de Groot provaram que tal partição de Robertson pode ser escolhida de forma que cada um dos cinco conjuntos é localmente conexo.

2.5. Congruência de Conjuntos.

Definição 5 *Diremos que dois subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^3$ são* congruentes por partes, *e escrevemos $X \sim Y$, se para algum número natural n existir uma partição*

$$\{X_i : 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$$

de X e um correspondente conjunto $\{f_i : 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$ de isometrias tal que

$$\{f_i(X_i) : 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$$

seja uma partição de Y. Se X é congruente por partes a um subconjunto de Y, escrevemos $X \precsim Y$.

Teorema 6 *Sejam X, Y e Z subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Então:*

(*i*) $X \sim X$;

(*ii*) $X \sim Y$ *implica* $Y \sim X$;

(*iii*) $X \sim Y$ *e* $Y \sim Z$ *implica* $X \sim Z$;

(*iv*) $X \sim Y$ *implica* $X \lesssim Y$;

(*v*) $X \lesssim Y$ *e* $Y \lesssim Z$ *implica* $X \lesssim Z$;

(*vi*) $X \subset Y$ *implica* $X \lesssim Y$;

(*vii*) $X \lesssim Y$ *e* $Y \lesssim X$ *implica* $X \sim Y$.

Demonstração Em (i) nada temos a fazer, já que ι é uma isometria. Para (ii) basta observar que a inversa de uma isometria é uma isometria. (iv) é imediato, já que $Y \subset Y$.

(v) Suponha que $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ e $\{Y_i : 1 \leq i \leq m\}$ são partições de X e Y respectivamente, e $\{f_j : 1 \leq j \leq n\}$ e $\{g_i : 1 \leq i \leq m\}$ são os conjuntos das isometrias tais que $\{f_j(X_j) : 1 \leq j \leq n\}$ é uma partição de algum $Y_0 \subset Y$ e $\{g_i(Y_i) : 1 \leq i \leq m\}$ é uma partição de algum $Z_0 \subset Z$. Então os $m \cdot n$ conjuntos $A_{ij} = X_j \cap f_j^{-1}(Y_i)$ forma uma partição[16] de X e, para i fixo, os n conjuntos $f_j(A_{ij}) = Y_i \cap f_j(X_j)$, $1 \leq j \leq n$, formam uma partição de $Y_i \cap Y_0$ donde temos que $\{g_i f_j(A_{ij}) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ é uma partição de algum subconjunto $Z_1 \subset Z$. Cada composição $g_i f_j$ é uma isometria, daí segue que $X \sim Z_1$ e $X \lesssim Z$. Fazendo $Y_0 = Y$ e $Z_0 = Z$ temos (iii).

(vi) também é trivial, pois ι é uma isometria.

(vii) Suponha que $X \sim Y_0$ e $Y \sim X_0$ com $X_0 \subset X$ e $Y_0 \subset Y$. Manteremos as notações do parágrafo acima fazendo $X = Z$ e $X_0 = Z_0$. Para provarmos que $X \sim Y$ imitaremos a demonstração do famoso Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder[17]. Primeiro definimos f em X e g em Y pondo $f(x) = f_j(x)$ se $x \in X_j$ e $g(y) = g_i(y)$ se $y \in Y_i$. Para $E \subset X$, defina $E' \subset X$ por

$$E' = X \backslash g(Y \backslash f(E)). \tag{9}$$

Temos então que

$$E \subset F \subset X \Rightarrow E' \subset F'. \tag{10}$$

Seja $\mathcal{D} = \{E : E \subset X, E \subset E'\}$. Note que $\varnothing \in \mathcal{D}$. Seja $D = \cup_{E \in \mathcal{D}} E$. Para cada $E \in \mathcal{D}$ temos de (10) que $E' \subset D'$, logo $E \subset D'$. Assim $D \subset D'$ e de (10) segue que $D' \subset (D')'$. Consequentemente $D' \in \mathcal{D}$, $D' \subset D$ e $D' = D$. Colocando $E = D$ em (9) obtemos

$$D = X \backslash g(Y \backslash f(D)), \; X \backslash D = g(Y \backslash f(D)).$$

Note que $X \backslash D \subset X_0$. Agora defina, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$,

$$A_j = D \cap X_j, \; A_{n+i} = g_i(Y_i \backslash f(D)), \; h_i = f_i \text{ e } h_{n+i} = g_i^{-1}.$$

[16] Para j fixo, os m conjuntos $A_{1j}, \ldots, A_{mj}$ são dois a dois disjuntos e $\cup_i A_{ij} = X_j$.

[17] Dados os conjuntos A e B, suponha que existam funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Então existe uma bijeção $h : A \to B$.

Segue então que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ é uma partição de D, $\{A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}\}$ é uma partição de $X \backslash D$, $\{h_1(A_1), \ldots, h_n(A_n)\}$ é uma partição de $f(D)$ e

$$\{h_{n+1}(A_{n+1}), \ldots, h_{n+m}(A_{n+m})\}$$

é uma partição de $Y \backslash f(D)$. Portanto $X \sim Y$. □

As propriedades $(i), (ii), (iii)$ do teorema acima nos garantem que $\sim$ é uma relação de equivalência entre subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Em outras palavras, $\sim$ detemina uma partição no conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, a saber, o conjunto das classes de equivalência.

Mostraremos agora que se $\mathcal{A} = \left\{A \subset \mathbb{R}^3 : A \text{ é limitado}, \mathit{int}(A) \neq \varnothing\right\}$, então o conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim$ é trivial (só tem uma classe de equivalência). Esta afirmação nada mais é do que o Teorema de Banach-Tarski.

2.6. O paradoxo de Banach-Tarski. Uma translação de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ é um subconjunto da forma $A + b = \{x + b : x \in A\}$ sendo $b \in \mathbb{R}^3$ fixo. Se $D \subset \mathbb{R}^3$, definimos, para $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta D = \{\delta x : x \in D\}$. A bola fechada $\overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0;\varepsilon)$ será denotada por $\overline{B}(0;\varepsilon)$.

Teorema 7 *Seja* $\overline{B}(0;\varepsilon)$ *e* $\overline{B}(a_1;\varepsilon), \ldots, \overline{B}(a_n;\varepsilon)$ *translações de* $\overline{B}(0;\varepsilon)$*, então*

$$\overline{B}(0;\varepsilon) \sim \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(a_i;\varepsilon).$$

Demonstração Escolha $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|a\| > 2\varepsilon$, e seja $\overline{B}(a;\varepsilon)$ a translação $\overline{B}(0;\varepsilon) + a$. Mostraremos agora que

$$\overline{B}(0;\varepsilon) \sim \left(\overline{B}(0;\varepsilon) \cup \overline{B}(a;\varepsilon)\right).$$

Sejam B_i e r_i como no Teorema 5. Assim temos que $\{\varepsilon B_i : 1 \leq i \leq 40, i \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de $\overline{B}(0;\varepsilon)$. Defina as isometrias s_i por

$$s_i(x) = \begin{cases} \varepsilon r_i\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right) & \text{se} \quad 1 \leq i \leq 24 \\ \varepsilon r_i\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right) + a & \text{se} \quad 25 \leq i \leq 40 \end{cases}.$$

Do Teorema 5 temos que $\{s_i(\varepsilon B_i) : 1 \leq i \leq 24, i \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de $\overline{B}(0;\varepsilon)$ e $\{s_i(\varepsilon B_i) : 25 \leq i \leq 40, i \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de $\overline{B}(a;\varepsilon)$. Logo

$$\{s_i(\varepsilon B_i) : 1 \leq i \leq 40, i \in \mathbb{N}\}$$

é uma partição de $\overline{B}(0;\varepsilon) \cup \overline{B}(a;\varepsilon)$, como queríamos.

O teorema segue agora por indução sobre n. O passo $n = 1$ é imediato. Suponha agora que $n > 1$ e $\overline{B}(0;\varepsilon)$ é parte congruente a uma união $\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{B}(a_i;\varepsilon)$ de translações de $\overline{B}(0;\varepsilon)$. Seja $\overline{B}(a_n;\varepsilon)$ outra translação de $\overline{B}(0;\varepsilon)$. Temos que $\overline{B}(a_n;\varepsilon) \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{B}(a_i;\varepsilon)\right)$ é congruente a um subconjunto de $\overline{B}(a;\varepsilon)$. Daí segue que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(a_i;\varepsilon) \precsim \overline{B}(0;\varepsilon) \cup \overline{B}(a;\varepsilon) \sim \overline{B}(0;\varepsilon).$$

É claro que $\overline{B}(0;\varepsilon) \lesssim \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(a_i;\varepsilon)$. Portanto $\overline{B}(0;\varepsilon) \sim \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(a_i;\varepsilon)$. □

Teorema 8 (Banach - Tarski) *Se X e Y são subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^3$ com interior não vazio, então $X \sim Y$. Em outras palavras, se*

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^3 : A \text{ é limitado, } int(A) \neq \varnothing \right\},$$

então o conjunto quociente $\frac{\mathcal{A}}{\sim}$ é trivial.

Demonstração Escolha pontos a e b interiores a X e Y respectivamente, e seja $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(0;\varepsilon)$ satisfaz $\overline{B}(0;\varepsilon) + a \subset X$ e $\overline{B}(0;\varepsilon) + b \subset Y$, ou seja, $\overline{B}(a;\varepsilon) \subset X$ e $\overline{B}(b;\varepsilon) \subset Y$. Como X é limitado, existem $\overline{B}(a_1;\varepsilon), \ldots, \overline{B}(a_n;\varepsilon)$ translações de $\overline{B}(0;\varepsilon)$ cuja união contém X. Aplicando o teorema acima, temos que

$$\overline{B}(0;\varepsilon) \lesssim X \subset \left(\overline{B}(a_1;\varepsilon) \cup \ldots \cup \overline{B}(a_n;\varepsilon)\right) \sim \overline{B}(0;\varepsilon).$$

Daí segue que $X \sim \overline{B}(0;\varepsilon)$. Similarmente temos que $Y \sim \overline{B}(0;\varepsilon)$. Portanto $X \sim Y$. □

3. Considerações Finais

A tentativa ingênua da inserção do paradoxo de Banach-Tarski em nosso mundo físico não é um erro de interpretação restrito a física-matemática. Podemos tirar conclusões inesperadas dentro da própria matemática. Vejamos algumas afirmações como exemplos:

1. Existem seqüências de números reais que convergem para qualquer número real;

2. Todo triângulo no espaço é isósceles;

3. O espaço vetorial $\mathbb{R}$ tem dimensão infinita;

4. Qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}$ possui um menor elemento.

Nenhuma das afirmações acima parecem ter cabimento. Mas acreditem, todas elas são legítimas (em algum contexto)! Pare um pouco agora e comece a tirar conclusões a respeito das mesmas esquecendo a afirmação "em algum contexto".

...

As conclusões devem ter sido catastróficas. O que está errado então? O erro está na tentativa de aplicarmos os resultados no contexto da geometria plana ou espacial que usamos como suporte para compreensão de grande parte das teorias estudadas na escola ou na graduação. Vejamos então como as afirmações acima concebem-se legítimas:

- Para a primeira afirmação devemos nos perguntar qual é a topologia adotada no contexto de sua veracidade: por exemplo, $\mathbb{R}^3$ com a topologia trivial $\{\varnothing, \mathbb{R}^3\}$ é um espaço com tal propriedade. Acontece que, em geral, quando pensamos no espaço $\mathbb{R}^3$ automaticamente adotamos a topologia Hausdorff definida pela norma euclidiana; nesta topologia a afirmação é falsa porque temos a unicidade do limite;

- O ponto chave para a segunda afirmação é a métrica adotada. Quando pensamos em objetos geométricos não abrimos mão inicialmente de uma norma arquimediana, a conhecida função módulo. A métrica obtida a partir da função módulo não permite a validez da segunda afirmação então. No entanto nos espaços com métricas que provêm de normas não arquimedianas, conhecidas como ultra-métricas, cabem perfeitamente o resultado. Citamos por exemplo os números racionais $\mathbb{Q}$ com a norma p-ádica;

- Para a terceira afirmação acrescente a seguinte pergunta: qual é o corpo que estamos considerando? É claro que o espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ tem dimensão 1. No entanto $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tem dimensão infinita, já que no caso contrário teríamos $\mathbb{R}$ extensão algébrica de $\mathbb{Q}$, e daí $\pi \approx 3.14$ não seria transcendente sobre $\mathbb{Q}$;

- Por fim, para a última afirmação, a *priori*, usamos a relação de ordem usual $\leq$ dos números reais para questioná-la. No entanto o teorema de Zermelo afirma que $\mathbb{Z}$ pode ser bem ordenado, ou seja, existe uma relação de ordem (que não é a usual $\leq$) que faz com que cada subconjunto seja limitado inferiormente em relação a esta ordem.

Agradecimentos

O autor agradece os professores Lúcio Souza Fassarella, da Universidade Federal do Rio Grande, Carlos Alberto Panek Junior, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, e Luiz A. B. San Martin, da Universidade Estadual de Campinas, pelos comentários e sugestões. O autor também agradece o "referee" pelas correções e sugestões.

References

[1] Boyer, Carl B. - *A History of Mathematics* - John Wiley & Sons, Inc (1991).

[2] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Ribeiro, V. L. F. F., Wetzler, H. G. - *Álgebra Linear* - Editora Harper e Row do Brasil Ltda, São Paulo (1980).

[3] Bruckner, A. M. and Ceder, J. - *On improving Lebesgue measure* - Nordisk Mat. Tidskr, 23 (1975), pp. 59-68.

[4] Banach, S. and Tarski, A. - *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* - Fund. Math. 6 (1924), pp. 244-277.

[5] Dekker, T. J. and Groot, J. de - *Decompositions of a sphere* - Fund. Math. 43 (1956), pp. 185-194.

[6] Figueiredo, Djairo Guedes de - *Números Irracionais e Transcendentes* - Coleção Iniciação Científica, SBM (2002).

[7] Hausdorff, F. - *Grundzüge der Mengenlehre* - Leipzig (1914).

[8] Lima, Elon L. - *Álgebra Linear* - Coleção Matemática Universitária, terceira edição (1998).

[9] Lyndon, Roger C. - *Groups and Geometry* - London Mathematical Society Lecture Note Series, 101, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[10] Robertson, R. M. - *On the decomposition of spheres* - Fund. Math. 34 (1947), pp. 246-260.

[11] Rotman, Joseph J. - *The Theory of Groups* - Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics (1973).

[12] Stromberg, K. - *The Banach-Tarski Paradox* - The American Mathematical Monthly, vol. **86**, n. 3, pp. 151-161 (1979).

[13] Sierpiński, W. - *Congruence of sets* - Chelsea, New York (1953).

Luciano Panek
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Maringá
Campus Universitário - Av. Colombo 5790
CEP 87020-900, Maringá-Pr, Brasil
lpanek@uem.br