

Análise Complexa e Geometria Diferencial de certas Superfícies do Espaço hiperbólico

Ricardo Sa Earp

ABSTRACT: Desde os tempos de Gauss, Riemann e de outros que a Geometria Diferencial entrelaça-se com a Análise Complexa. Um dos mais belos efeitos disto é a bem conhecida *representação de Weierstrass* para superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$, consistindo de dados meromorfos (f, g) que descrevem inteiramente uma tal superfície. O estudo da análise complexa aplicado neste contexto, ao longo das últimas décadas, tem produzido vertiginosos resultados e tem desenvolvido esta teoria para além das expectativas. Já é bem conhecido que às superfícies mínimas simplesmente conexas de $\mathbb{R}^3$ pode-se associar suas *primas* no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$ que possuem curvatura média igual a 1. Tal relação segue do teorema fundamental da Geometria, calcado nas equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi. O fato é que também existem *dados meromorfos* sobre as superfícies de curvatura média 1 em $\mathbb{H}^3$, o que sob um ponto de vista filosófico é de se esperar. Este é o escopo destas notas: Explicar um pouco as origens desta teoria e suas ligações com a teoria clássica das superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$ e apresentar os dados meromorfos e exemplos, segundo um trabalho recente do autor com Toubiana. Como o espaço hiperbólico possui vários modelos naturais, diferentemente do espaço Euclideano, existem vários pontos de vistas alternativos nesta teoria- revelando a riqueza inigualável da Geometria Hiperbólica. Isto tem sido estabelecido por R. Bryant, Umehara, Yamada que são os pioneiros na moderna abordagem deste assunto. Notáveis trabalhos nesta área também têm sido compilados por Rossman, Small, Rosenberg, Collin, Hauswirth e Toubiana. De modo que fervilham resultados que exibem a pujança do *link* Análise Complexa, Geometria Hiperbólica & Geometria Diferencial. ¹

Contents

1	Introdução	2
2	A linguagem proveniente da análise complexa e as superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$	5
3	O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$	8
4	Superfícies de curvatura média pré-determinada em $\mathbb{R}^3$	11
5	A família catenóide-helicóide	12

¹ Durante a elaboração deste artigo o autor foi parcialmente apoiado pelo CNPq e PRONEX.

6 Teorema de representação e teorema de dados meromorfos

13

1. Introdução

Recentemente, o autor destas notas e Toubiana iniciaram certa pesquisa sobre as superfícies com curvatura média 1 no espaço hiperbólico; às quais chamaremos de *primas das superfícies mínimas de $\mathbf{R}^3$* , ou simplesmente *primas das mínimas* (tal terminologia será justificada adiante). O *approach* utilizado é inovador, tendo como resultado a determinação de *meromorphic data* e um teorema de representação para tais superfícies em $\mathbf{H}^3$, via um *constructo* bem geométrico (veja [32], [33], [34]). Como já enfatizamos no *Abstract*, a abordagem não é a única. Vamos abrir agora um parêntese para discorrer um pouco sobre a história deste assunto à luz de descobertas modernas. O leitor fica advertido que não faremos um *survey* completo sobre o assunto, apenas sublinharemos em seguida alguns fatos e progressos marcantes das últimas duas décadas:

No limiar dos anos 80 R. Bryant estabeleceu a sua famosa representação, conhecida atualmente como representação de Bryant (veja [3]). Manfredo Do Carmo e Alexandre Magalhães da Silveira usufruindo de certas idéias de Bryant que, essencialmente, consistem num aprofundamento de propriedades de funções meromorfas, mostraram que o *índice de Morse* de uma imersão completa com curvatura média 1 em $\mathbf{H}^3$ é finito se, e somente se a *curvatura total* é finita (veja [7]). É interessante notar que Javier Ordóñez em sua tese de doutorado na PUC-Rio mostrou que as superfícies de rotação com curvatura média 1 em $\mathbf{H}^3$ tem curvatura total finita (veja [20]). Para completar esta história queremos observar que Alexandre Magalhães da Siveira, mostrou que uma imersão completa com curvatura média 1 *fracamente estável* (veja [8]) é necessariamente uma horosfera (veja [36]). Nos idos dos anos 90, a representação de Bryant foi magistralmente explorada por Umehara e Yamada que deduziram resultados e técnicas muito poderosas, fazendo um liame interessante com as Variáveis Complexas. Pode-se afirmar que Umehara e Yamada tiveram papel fundamental no desenvolvimento do assunto. Por exemplo, eles introduziram o importante conceito de *fins regulares* (tais fins são discos perfurados cuja aplicação de Gauss hiperbólica se estende meromorficamente ao *puncture*). Também estabeleceram equações fundamentais baseadas na *teoria das equações diferenciais de segunda ordem lineares singulares regulares*, construindo exemplos de primas das mínimas completas com fins regulares e fins irregulares (veja [39], [40], [41]). Em seguida Rossman se juntou a dupla e obtiveram vários resultados que enriqueceram a teoria, exibindo exemplos de primas de gênero g , com muitas simetrias e fins mergulhados (veja [25], [26], [27], [28]). Por outro lado, o presente autor junto com Toubiana, usando certas técnicas desenvolvidas por Umehara e Yamada sobre a representação de Bryant, estabeleceram que se E é um fim regular, mergulhado em $\mathbf{H}^3$, com curvatura média 1 e curvatura total finita, então E é ou

bem assintótico a uma prima do catenóide, ou bem assintótico a uma horosfera. Mais precisamente, no modelo do semi-espço tal E é assintótico, como gráfico Euclidiano vertical, a um fim de horosfera ou a um fim de prima do catenóide (veja [31]). Assim, similarmente ao resultado de Schoen no espaço Euclidiano sobre fins mínimos mergulhados com curvatura total finita em $\mathbf{R}^3$ (veja [35]), obtivemos uma classificação geométrica no espaço hiperbólico dos fins mergulhados de curvatura total finita das chamadas primas das mínimas. Lima junto com Rossman escreveram um artigo no qual este comportamento assintótico estava implícito (veja [18]), porém nós inferimos fórmulas explícitas que acarretaram nesta classificação. De fato, o comportamento assintótico como gráficos Euclidianos que estabelecemos, acreditamos ter sido muito surpreendente. Usando a referida classificação geométrica dos fins, Collin, Hauswirth e Rosenberg, demonstraram que um fim propriamente mergulhado em $\mathbf{H}^3$, de curvatura média 1, tem que ser regular e de curvatura total finita (veja [4]). Existe uma fórmula para as superfícies de curvatura média 1 de $\mathbf{H}^3$ conhecida por fórmula de Small, baseada em métodos da geometria algébrica (veja [37]). O nosso referido trabalho sobre *meromorphic data* delinea e estabelece uma dedução alternativa desta fórmula. Os brasileiros Lima e Roitman, explicaram a fórmula de Small do ponto de vista do método de Bianchi que remonta ao início do século 20 (veja [17]). Por outro lado, Kokubu, Umehara e Yamada, escreveram uma demonstração elementar da fórmula de Small e outros desenvolvimentos similares (veja [15]). O conhecimento de técnicas das Variáveis Complexas das funções elípticas propiciou a Costa descobrir a sua famosa superfície mínima (veja [5]). Costa junto com Souza Neto construiu uma prima análoga no espaço hiperbólico (veja [6]). Finalmente, queremos observar que Galvão e Góes estabeleceram um *approach* alternativo das primas das mínimas (veja [9]). Vamos fechar agora este parênteses histórico e continuar nossa discussão.

* * *

Há uma grande afinidade entre nossa idéia ou concepção de *meromorphic data*, a qual estamos nos propondo a comunicar nestas linhas, com o trabalho de Kenmotsu publicado em 1979 (veja [14]), sobre uma representação de tipo Weierstrass para superfícies de curvatura média constante (não nula) em $\mathbf{R}^3$. De fato, considere a seguinte equação num domínio simplesmente conexo U do plano complexo $\mathbb{C}$:

$$E_{z\bar{z}} = 2 \frac{\bar{E} E_z E_{\bar{z}}}{1 + E\bar{E}}$$

Observe que toda solução da equação de Kenmotsu origina uma imersão conforme (possivelmente com pontos de ramificação) com curvatura média constante em $\mathbf{R}^3$. Todavia é difícil encontrar soluções não triviais da equação de Kenmotsu. Por outro lado, observamos que Ritoré usou a equação de Kenmotsu para construir superfícies

periódicas com curvatura média constante em $\mathbf{R}^3$ (veja [23]). No nosso estudo apareceu naturalmente uma equação similar para superfícies de curvatura média 1 no espaço hiperbólico para as *primas das mínimas*: Pense que $E(z)$ é a aplicação de Gauss Euclideana usual em $\mathbf{H}^3$ e que $z \in U$, onde U é um domínio simplesmente conexo. Considere a equação

$$(*) \quad E_{z\bar{z}} = \frac{\overline{E}E_zE_{\bar{z}}}{1 + E\overline{E}}$$

Nós conseguimos resolver completamente a equação (*), expressando qualquer solução E via uma representação que pode ser escrita em termos de dados meromorfos (h, T) em U . Na verdade, dada qualquer solução E , demonstramos que E origina uma imersão conforme ramificada de curvatura média 1 em $\mathbf{H}^3$, sendo que os pontos de ramificação, caso existirem, são isolados e são explicitamente determinados como zeros de $E_{\bar{z}}$ (veja [32]). Além disso, a função altura w , a aplicação de Gauss Euclideana E , a métricas e a segunda forma fundamental são exibidas explicitamente em termos do par meromorfo (h, T) . Por exemplo,

$$\begin{aligned} w &= \frac{|h^2T_z|^2}{|(Th)_z|^2 + |h_z|^2} \\ E &= h \cdot \left(\frac{Th_z + hT_z}{h^2T_z} \right) \left(T + \overline{\left(\frac{h_z}{Th_z + hT_z} \right)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Agora, gostaríamos de observar que a componente horizontal $u + iv$ está dada por uma integração complexa envolvendo (h, T) , ou seja $\int h^2 dT$. De certo modo, é possível manter controle sobre os pontos de ramificação a fim de se obter imersões regulares conformes de primas das mínimas (veja [33]). Finalmente, à guisa de conclusão, realçamos o fato que tivemos que olhar as primas das mínimas dentro do contexto geral das imersões conformes em $\mathbf{H}^3$ com curvatura média arbitrária. De fato, inferimos fórmulas gerais para uma qualquer imersão conforme que fazem um papel preponderante na teoria. Por exemplo, as seguintes fórmulas são essenciais:

$$u + iv = G - wE \quad (2)$$

$$G_z = wE_z \quad (3)$$

onde $u + iv$ é a componente horizontal, w é a altura, E é a aplicação de Gauss Euclideana e G é a aplicação de Gauss hiperbólica. De posse de tais fórmulas obtivemos um teorema de representação tipo Weierstrass-Kenmotsu para superfícies de curvatura média pré-determinada no espaço hiperbólico (veja [34]).

2. A linguagem proveniente da análise complexa e as superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Vamos fixar agora certa linguagem complexa e vamos fazer uma breve incursão na área das superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$. Nesta discussão seguiremos um plano fundamentado no nosso livro com Toubiana sobre a Geometria Hiperbólica e as Superfícies de Riemann (veja [30]).

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano hiperbólico. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em U é holomorfa se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} := f'(z)$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é conforme, se f preserva ângulos orientados. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann* (veja adiante), é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$. Uma função holomorfa f em U , exceto num conjunto de pontos isolados $\mathcal{S}$ de U , tal que $\lim_{z \rightarrow s} |f(z)| = \infty$, quando z tende à algum destes pontos isolados é chamada de *função meromorfa*. Cada ponto de $\mathcal{S}$ é chamado de pólo de f . À toda função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, (não necessariamente holomorfa) que possui derivadas parciais f_x e f_y ($z = x + iy$), é costume associar as derivadas com respeito a z e a $\bar{z}$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \qquad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

ou equivalentemente

$$f_x = f_z + f_{\bar{z}} \qquad f_y = if_z - if_{\bar{z}}$$

Outra notação corrente é $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ e $f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Pode ser facilmente verificado que se f é holomorfa em U , então $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, em U (equações de Cauchy-Riemann). Neste caso, tem-se que $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$. O teorema de Looman-Menchoff fornece a recíproca (veja [19] página 7): Seja f uma função contínua em U e assuma que as derivadas parciais f_x e f_y existem, em U , e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, i.e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$. Tem-se então que f é holomorfa em U .

Agora considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto escalar usual $\cdot$, ou seja, para cada par de vetores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ tem-se que

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$, $z \mapsto X(z)$ é uma *imersão conforme*, se $X_x \cdot X_y = 0$, $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$, $\forall z \in U$. Além disso exige-se que $\{X_x, X_y, N\}$ seja uma base positiva de $\mathbf{R}^3$, onde N é a aplicação de Gauss Euclideana (normal unitário) definida por

$$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$$

sendo que o símbolo $\times$ refere-se ao produto vetorial de $\mathbf{R}^3$. Superfícies que *minimizam* área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são mínimas com a definição usual de um primeiro curso de Geometria Diferencial: a soma das curvaturas principais é nula. Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte é uma função meromorfa; isto é $\Pi \circ N := g$ é meromorfa.

Vamos agora descrever sumariamente a *representação de Weierstrass* para as superfícies mínimas de $\mathbf{R}^3$. Suporemos que o leitor esteja familiarizado com *integração complexa* e com o *teorema de Cauchy* (veja ^[1]).

Considere uma função meromorfa $g(z)$ e uma diferencial holomorfa $\omega = f(z) dz$, definidos em U . Assuma que pólos de g e os zeros de ω satisfazem a seguinte condição: Um ponto $c \in U$ é um zero de ordem $2n$ de ω se e somente se c é um pólo de ordem n de g . Suponha ainda que tenhamos:

$$\Re \left(\int_{\gamma} (1 - g^2) f dz \right) = 0 \quad \Re \left(i \int_{\gamma} (1 + g^2) f dz \right) = 0 \quad \Re \left(\int_{\gamma} f g dz \right) = 0$$

para todo caminho fechado γ em U . Neste caso, fixando-se um ponto $z_0 \in U$, temos que a aplicação

$$X(z) = \Re \left(\int_{z_0}^z \frac{(1 - g^2)f}{2} dz, i \int_{z_0}^z \frac{(1 + g^2)f}{2} dz, \int_{z_0}^z f g dz \right)$$

está bem definida em U , posto que a integral não depende do caminho ligando z_0 à z . A condição sobre os pólos de g e zeros de ω , assegura que X é uma imersão conforme de U em $\mathbf{R}^3$. Logo g tem um importante significado geométrico: é a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte. Note que com isso fica a disposição todas as poderosas ferramentas da Análise Complexa que são muito aplicadas na exploração de propriedades das superfícies mínimas. Por exemplo: existem teoremas e até mesmo conjecturas abertas sobre os valores omitidos da aplicação normal de Gauss que são teoremas “tipo Picard” (veja ^[21], ^[2] ^[30]). O par (g, ω) é chamado de *representação de Weierstrass-Enneper*, ou

simplesmente de representação de Weierstrass. De fato, pode ser mostrado que toda imersão mínima conforme de U em $\mathbf{R}^3$, pode ser obtida desta maneira. A métrica ds^2 e a curvatura de Gauss K da imersão podem ser explicitamente dadas em termos do par (g, f) :

$$ds^2 = \left(\frac{|f|}{2}(1 + |g|^2) \right)^2 |dz|^2$$

$$K = - \left(\frac{4|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right)^2$$

As superfícies mínimas completas de curvatura total finita, tem sido muito estudadas com notáveis descobertas (veja, por exemplo [11]).

Vamos explicar agora o conceito: Dada uma superfície M , dizemos que γ é uma *curva divergente*, se γ “sai” de todo compacto de M . Dizemos que M é *completa* se toda curva divergente tem comprimento infinito. Seja $K(p)$ a curvatura de Gauss de M em um ponto p . A *curvatura total* de M , denotada por $C(M)$ está definida por

$$C(M) = \int_M K(p) dA$$

onde dA é o elemento de área. Note que no caso das mínimas é fácil provar que $K \leq 0$, logo a integral acima sempre converge. Pode ainda ser mostrado que a curvatura total tem o seguinte significado geométrico: representa a área esférica da aplicação normal de Gauss contada com multiplicidades (veja exemplos adiante).

Outra propriedade importante das superfícies mínimas de $\mathbf{R}^3$ é o *princípio de reflexão* que diz o seguinte: uma superfície mínima que contém um segmento de reta no seu bordo pode ser prolongada analiticamente fazendo-se a simetria com respeito à reta (veja [16]). Na verdade tal princípio está fundamentado no bem conhecido *princípio de simetria de Schwarz* para funções holomorfas (veja [1]). Vamos agora reproduzir o par de Weierstras (g, ω) de algumas superfícies mínimas clássicas:

Catenóide Sabe-se que o catenóide é a única superfície mínima de revolução cuja

curva geratriz é a catenária: $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g(z) = z, \omega = \frac{dz}{z^2}$. Note que a curvatura total do catenóide é -4π , já que a imagem da aplicação normal de Gauss é a esfera menos os pólos norte e sul.

Helicóide O helicóide é *localmente isométrico* ao catenóide e, sem contar com o plano, é a única superfície mínima *regrada*: $U = \mathbb{C}, g(z) = e^z, \omega = i e^{-z} dz$. O catenóide é uma superfície mínima periódica, logo possui curvatura total $-\infty$.

Enneper A superfície de Enneper tem a seguinte parametrização. $U = \mathbb{C}$, $g(z) = z, \omega = dz$.

O compêndio clássico sobre superfícies mínimas é o texto de Osserman (veja [21]), cujas pesquisas em meados do século vinte introduziram a geometria conforme no estudo das mínimas, suscitando desde então muito interesse no assunto. Também existem os opúsculos de Costa que desenvolve a teoria das funções elípticas e aspectos da teoria das superfícies de Riemann explicando a construção da superfície mínima com seu nome (veja [5]) e de Barbosa -Colares (veja [2]) que descreve vários exemplos e propriedades das superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$.

3. O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$

Vamos agora perambular no espaço hiperbólico fixando notações e evocando certas noções que serão úteis aos nossos propósitos. A nossa referência central sobre o assunto são o referido livro (veja [30]) e o trabalho sobre *meromorphic data* ([32]), ambos elaborados com Toubiana. Vamos focalizar o chamado modelo do semi-espaço do espaço hiperbólico, denotado por $\mathbb{H}^3$, ou seja

$$\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$$

munido da métrica

$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

o que significa dizer que, denotando por $\langle, \rangle$ o produto interno de $\mathbb{H}^3$, para cada par de vetores tangentes $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ no ponto $(u, v, w) \in \mathbb{H}^3$ tem-se que $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{w^2} \vec{a} \cdot \vec{b}$. O plano Euclideo horizontal $\{w = 0\} \cup \{\infty\}$ é chamado de *bordo assíntótico* (e é denotado por $\partial_\infty \mathbb{H}^3$). A Geometria Diferencial das superfícies de $\mathbb{H}^3$ pode ser desenvolvida nos moldes do contraparte Euclideo; por exemplo as várias noções geométricas de *geodésicas*, *curvaturas* (e.g. *curvaturas principais*, *curvatura de Gauss*, *curvatura média*), assim como as *equações fundamentais da geometria* (e.g. *segunda forma fundamental*, *equações de curvatura de Gauss e de Codazzi-Mainardi*) são inferidas similarmente. Por exemplo, as curvas que *minimizam* o comprimento de arco entre dois pontos quaisquer por onde ela passa, chamadas de *geodésicas* de $\mathbb{H}^3$, são as semi-retas verticais e os semi-círculos ortogonais ao bordo assíntótico, inteiramente contidos em $\mathbb{H}^3$. No espaço Euclideo aparecem logo o plano e as esferas que são superfícies com

propriedades geométricas importantes, sendo estas as únicas *superfícies totalmente umbílicas*, i.e com curvaturas principais iguais em todos os pontos. É sabido que no caso do plano tal curvatura é zero e no caso da esfera é constante diferente de zero. No espaço hiperbólico aparecem novidades revelando que em certo sentido este é “maior” que o espaço Euclidiano. As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

Os planos totalmente geodésicos Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais ao bordo assíntótico, inteiramente contidos em $\mathbb{H}^3$. Tais planos tem curvaturas principais iguais a zero e são “cópias” do plano hiperbólico bidimensional possuindo curvatura de Gauss $K = -1$.

As esferas hiperbólicas Estas podem ser descritas geometricamente como o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{H}^3$ que estão a uma mesma distância ρ de um ponto fixado p . Tal esferas são também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$, possuindo curvaturas principais em módulo > 1 iguais a $\coth \rho$.

As horosferas As horosferas tem curvaturas principais em módulo iguais a 1 e são as esferas Euclidianas tangente ao bordo assíntótico e os planos Euclidianos horizontais inteiramente contidos em $\mathbb{H}^3$.

As superfícies equidistantes Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \theta < \pi/2$ com o bordo assíntótico, inteiramente contidos em $\mathbb{H}^3$. Estas superfícies têm em módulo curvaturas principais constantes entre 0 e 1.

Poderíamos neste momento citar também os *cilindros hiperbólicos* que são o lugar dos pontos equidistantes de uma geodésica fixada. Por exemplo, o cone Euclidiano vertical com vértice na origem $(0, 0, 0)$ é o cilindro hiperbólico equidistante da geodésica vertical $\{(u, v, w); \quad u = v = 0, w > 0\}$. Tais cilindros são “planos”, i.e com curvatura de Gauss $K = 0$ e possuem curvatura média $\tilde{H} > 1$.

Um conceito central em Geometria é o conceito de *isometria*: Dizemos que um difeomorfismo $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é uma isometria se f preserva a métrica hiperbólica. Por exemplo é fácil ver que as translações Euclidianas horizontais, as rotações em torno de uma geodésica vertical e as homotetias com foco no bordo assíntótico que preservam $\mathbb{H}^3$ são isometrias positivas (preservam orientação) do espaço hiperbólico. Estas últimas são *translações hiperbólicas*, ao longo de uma geodésica vertical. Na verdade, toda isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ é a composta de uma translação Euclidiana horizontal, de uma *translação hiperbólica* e de uma *rotação hiperbólica*. Além disso, toda isometria positiva $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é a extensão de uma transformação de Möbius de

$T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (veja [30]).

Na verdade, baseado nas equações fundamentais de Codazzi-Mainardi pode-se mostrar que numa superfície de curvatura média constante, tanto no espaço Euclidiano quanto no espaço hiperbólico, existe uma certa diferencial quadrática holomorfa globalmente definida cujos zeros são os pontos umbílicos, usualmente chamada de *diferencial de Hopf*. Tal estrutura traz muitas informações. De fato, usando-a Hopf demonstrou seu teorema segundo o qual uma superfície imersa fechada (compacta sem bordo) de curvatura média constante (não nula) de genus 0 é uma esfera "redonda" (veja [12]).

Vamos agora rever a definição da aplicação de Gauss Euclidiana e dar a definição da aplicação de Gauss Hiperbólica: Seja $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{H}^3$ uma imersão conforme de um domínio simplesmente conexo U do plano complexo no espaço hiperbólico $\mathbf{H}^3$. Seja $N = (N_1, N_2, N_3)$ a aplicação de Gauss Euclidiana orientada tal como definimos anteriormente. Seja $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a aplicação estereográfica canônica. Seja

$$E = \Pi \circ N = \frac{N_1 + iN_2}{1 - N_3}$$

Vamos chamar E também de *aplicação de Gauss Euclidiana orientada* de X . Note que podemos recuperar N pela fórmula

$$N = \frac{(2\Re E, 2\Im E, E\bar{E} - 1)}{E\bar{E} + 1}$$

Note ainda que na teoria das superfícies mínimas de $\mathbf{R}^3$, E é o pequeno g . Seja $p = X(z)$, e considere γ^+ o *raio geodésico* de $\mathbf{H}^3$ partindo de p no sentido de N . Seja $\zeta \in \partial_\infty \mathbf{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, o ponto do que γ^+ encontra o bordo assintótico de $\mathbf{H}^3$. Definimos a aplicação $G : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, colocando $G(z) := \zeta$. Tal G é chamada de *aplicação normal de Gauss hiperbólica*. Na introdução exibimos uma fórmula básica que relaciona G , E e as coordenadas da imersão u, v, w . Vamos denotar doravante a curvatura média hiperbólica (semi-soma das curvaturas principais) da imersão X por $\tilde{H}$. Um fato notável descoberto por Bryant no trabalho referido na introdução é o seguinte: A imersão conforme X tem curvatura média $\tilde{H} = 1$, se e somente se a aplicação normal de Gauss hiperbólica G é meromorfa. Note que X é uma imersão mínima conforme em $\mathbf{R}^3$, se e somente se g é meromorfa. Isto já revela uma analogia entre as superfícies com curvatura média 0 de $\mathbf{R}^3$ e as superfícies com curvatura média $\tilde{H} = 1$ de $\mathbf{H}^3$.

Estes fatos também podem ser deduzidos do acervo de fórmulas que inferimos no modelo do semi-espaço do espaço hiperbólico (veja fórmulas (1), (2) e (3) na introdução); mais precisamente, podem ser deduzidos das seguintes fórmulas

$(E(z) \neq \infty, \quad \forall z \in U):$

$$(4) \quad ds^2 = \frac{|G_{\bar{z}} - wE_{\bar{z}}|^2}{w^2} |dz|^2$$

$$(5) \quad 2 \frac{G_{\bar{z}}}{1 + E\bar{E}} = (1 - \tilde{H})(G_{\bar{z}} - wE_{\bar{z}})$$

$$(6) \quad H = \frac{-2E_{\bar{z}}}{(1 + E\bar{E})(G_{\bar{z}} - wE_{\bar{z}})}$$

$$(7) \quad w_{\bar{z}} = \frac{\bar{E}}{1 + E\bar{E}} (G_{\bar{z}} - wE_{\bar{z}})$$

onde (repetimos) $\tilde{H}$ é a curvatura média hiperbólica, H é a curvatura média Euclideana (“esquecendo-se a métrica hiperbólica”), E, G são as aplicações de Gauss Euclideana e hiperbólica, respectivamente.

Agora gostaríamos de realçar a ligação entre as superfícies mínimas de $\mathbf{R}^3$ e suas *primas* em $\mathbf{IH}^3$: Dada uma imersão conforme mínima $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{R}^3$, de um domínio simplesmente conexo U em $\mathbf{R}^3$, segue das equações de Codazzi-Mainardi e de curvatura de Gauss (teorema fundamental da geometria), que podemos associar uma imersão conforme de curvatura média 1 em $\mathbf{IH}^3$; e vice-versa (veja [12], [38]). Este é um fato importante que está subjacente e sempre presente na teoria.

4. Superfícies de curvatura média pré-determinada em $\mathbf{R}^3$

Toubiana observou que certos resultados que já são considerados clássicos de Kenmotsu (veja [14]) podem ser recuperados e re-demonstrados *via* as fórmulas que nós inferimos no espaço hiperbólico: De fato, pode-se pensar que um “pedaço” da imagem de uma superfície imersa em $\mathbf{R}^3$, esteja contida no semi-espaço superior $\{w > 0\}$; ou seja tal superfície pode ser considerada um subconjunto do espaço hiperbólico, esquecendo-se a estrutura hiperbólica. Vamos esboçar alguns detalhes disto aqui. Note que das fórmulas (6) e (7) pode-se extrair uma fórmula geral para a derivada em relação a $\bar{z}$ da função altura w de uma superfície de curvatura média pré-determinada *não nula* H em termos da aplicação normal de Gauss Euclideana E , de sua derivada em relação a $\bar{z}$ e de H . Agora observe que da fórmula (6) segue imediatamente uma fórmula para $G_{\bar{z}}$ em termos da função altura de E , de $E_{\bar{z}}$ e de H . Levando-se em conta a fórmula para G_z dada pela equação (3), deduz-se, após algumas contas fáceis, a seguinte equação de Kenmotsu (Th. 3, pg. 96 de [13]):

$$H \left(E_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{E}E_zE_{\bar{z}}}{1 + E\bar{E}} \right) = H_zE_{\bar{z}}$$

Pode-se trabalhar um pouco mais e verificar que a equação acima é a *condição de compatibilidade* de certo sistema de equações a fim demonstrar um teorema de representação (*parametrização ramificada*) relativo a superfícies de curvatura média pré-determinada não nula H ; dependendo apenas de E (satisfazendo a equação acima). Este é o teorema principal de Kenmotsu em na referência citada. Compare com o resultado obtido em [34].

5. A família catenóide-helicóide

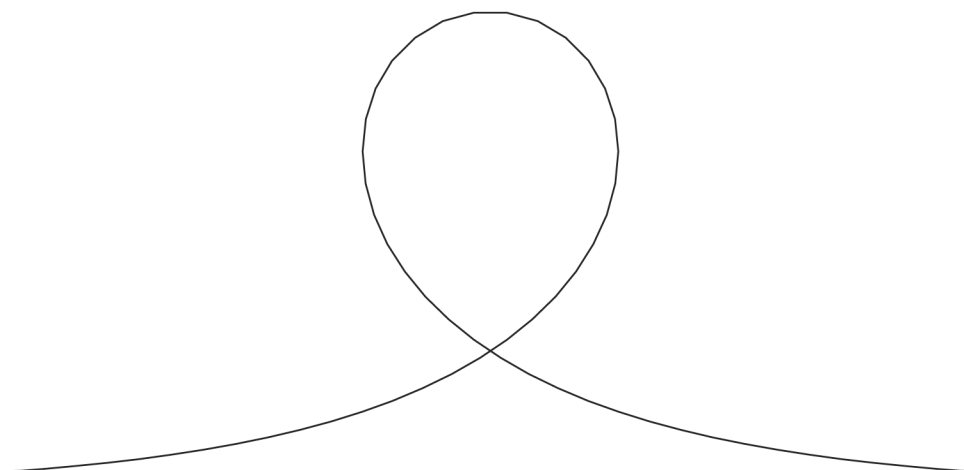
A família *Catenóide-helicóide* de superfícies mínimas localmente isométricas são dadas pela representação de Weierstrass

$$(g(z), f(z) dz) = (e^z, \lambda e^{i\theta} e^{-z} dz), \quad z \in \mathbb{C}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante positiva e $\theta \in [0, 2\pi)$. Sendo fixada λ , quando θ varia no intervalo $[0, 2\theta)$, obtém-se uma família de imersões mínimas isométricas ligando continuamente os catenóides (quando $e^{i\theta} = \pm 1$) aos helicóides (quando $e^{i\theta} = \pm i$). Lembramos que a cada elemento desta família corresponde a *associada* $\sim$ com curvatura média 1 (“prima”) no espaço hiperbólico. Um fato surpreendente é que quando $e^{i\theta} = -1$ e $\lambda = 1/4$ a superfície associada no espaço hiperbólico é uma superfície invariante por um grupo contínuo de translações Euclidianas horizontais, cuja curva geradora já tinha sido estudada por Poleni em 1729. Tal curva é conhecida como “courbe des forçats” (veja ref [22]). Em seguida, escrevemos a parametrização da curva de Poleni, esboçamos seu perfil e usamos o MAPLE para desenhar a superfícies em $\mathbb{H}^3$. Veja Figura 1. Note que $E(z)$ tem uma representação da forma: função holomorfa, função anti-holomorfa vezes a soma de uma função holomorfa com uma função anti-holomorfa. Tal estrutura se revelará verdadeira em geral.

“Courbe des forçats”

Poleni-1729



Courbe des Forçats: $u = s - 2 \tanh s$, $w = 2 / \cosh s$

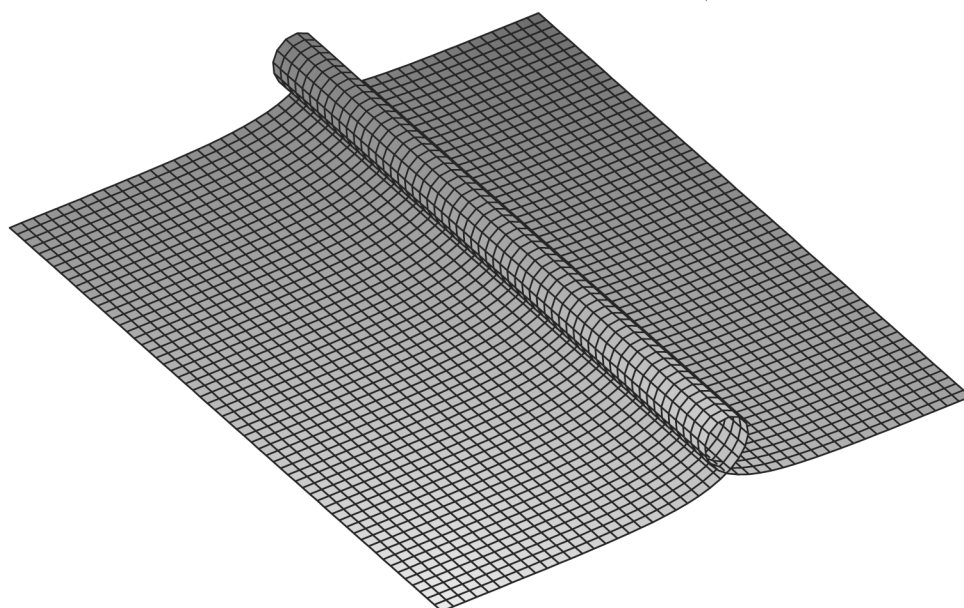


Figura 1

$$E = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} e^{\frac{\bar{z}}{2}} (-e^z + e^{-\bar{z}})$$

* * *

Agora, vamos fazer uma sinopse histórica dos fatos e resultados que giram em torno da família catenóide-helicóide e sua associada em $\mathbf{H}^3$. Lembramos que família catenóide-helicóide associada em $\mathbf{H}^3$ está dada por $g(z) = e^z$, $f(z) = \lambda e^{i\theta} e^{-z}$, $\lambda >$

0, $\theta \in [0, 2\pi[$. Em 1987 Bryant mostrou que as primas dos catenóides são obtidas fazendo $e^{i\theta} = 1$ or, $e^{i\theta} = -1$ e $\lambda < 1/4$. A superfície de Poleni tem sido enfocada por vários geômetras tais como Gomes [10], Ordóñez [20] e Sá Earp-Toubiana [31]. Está determinada pela seguinte representação: $e^{i\theta} = -1$, and $\lambda = 1/4$. As superfície de translação hiperbólica são associadas a um catenóide de $\mathbf{R}^3$, e são dadas por $e^{i\theta} = -1$, and $\lambda > 1/4$. As demais superfícies helicoidais propriamente ditas em $\mathbf{H}^3$ correspondem a todos os outros casos. Além disso vale a seguinte fórmula:

$$E = \underbrace{e^{-\gamma z}}_h \underbrace{e^{\bar{\gamma} \bar{z}}}_{\bar{s}} \underbrace{((1 + \gamma) e^{-z} + \bar{\gamma} \cdot \frac{1 + \gamma}{1 + \bar{\gamma}} \cdot e^{\bar{z}})}_T \underbrace{\quad}_{\bar{R}} \quad (8)$$

onde γ satisfaz

$$\gamma^2 + \gamma - \lambda e^{i\theta} = 0$$

6. Teorema de representação e teorema de dados meromorfos

Nas próximas linhas faremos um sumário dos resultados obtidos com Toubiana, segundo [32]. Para outros exemplos segundo o nosso *approach* veja [33]. De fato, em seguida enunciamos um teorema existência que mostra que toda solução não trivial da equação (*) dá origem a uma imersão conforme em $\mathbf{H}^3$ com curvatura média 1, veja Teorema 1. Além disso, tal solução é única a menos de uma homotetia e de uma translação Euclideana horizontal. Depois, escrevemos a representação de toda solução de (*) em termos de dados meromorfos. Finalmente, nas últimas páginas exibimos alguns exemplos.

Theorem 1 (Teorema de representação) *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e seja $E : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função não-holomorfa de classe C^2 satisfazendo a equação (*). Colocamos: $U^* = \{z \in U, E_{\bar{z}}(z) \neq 0\}$ ($U \setminus U^*$ é discreto). Temos então que existe uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbf{H}^3$ tal que a restrição de X à U^* é uma imersão conforme com curvatura média 1 de U^* em $\mathbf{H}^3$ cuja aplicação de Gauss Euclideana é E . Mais precisamente, temos que*

$$w(z) = e^{-2\Re \int \frac{\bar{E} E_{\bar{z}}}{1 + E \bar{E}} d\bar{z}}$$

$$G(z) = \int w E_z dz$$

$$(u + iv)(z) = (G - wE)(z)$$

A métrica hiperbólica induzida por X é dada por

$$ds = |E_{\bar{z}}| \cdot |dz|$$

Além disso, X está unicamente determinada, a menos de uma isometria positiva de $\mathbf{H}^3$. Mais precisamente, se $\hat{X} : U^* \rightarrow \mathbf{H}^3$ é uma outra imersão conforme com curvatura média 1, cuja aplicação de Gauss Euclideana é E , então existe um número real positivo $\lambda > 0$ e um número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{X}(z) = \lambda \cdot X(z) + (\alpha, 0).$$

Os próximos resultados revelam a estrutura complexa que mencionamos obtida na procura de soluções não triviais de (*), em termos de dados meromorfos.

Proposition 6.1 (Proposição fundamental) *E é uma solução não trivial da equação*

$$E_{z\bar{z}} = \frac{\bar{E}}{1 + \bar{E}E} E_z E_{\bar{z}} \quad *$$

da forma $E = h\bar{S}(T + \bar{R})$, definida num conjunto simplesmente conexo U se e somente se existem números complexos a , $a \neq 0$ e b tal que

$$\begin{aligned} S &= \frac{(b + aT)h_z + ahT_z}{h^2T_z} \\ R &= \frac{\bar{b}}{\bar{a}} + \frac{1}{\bar{a}} \cdot \frac{h_z}{(b + aT)h_z + ahT_z} \\ h &\neq \frac{1}{\alpha T + \beta} \text{ for any complex numbers } \alpha, \beta \end{aligned}$$

Reciprocamente, para quaisquer funções meromorfas h , $e T$, e quaisquer números complexos a e b , $a \neq 0$, a função $E = h\bar{S}(T + \bar{R})$, onde R e S estão definidos acima é uma solução da equação (*).

Theorem 2 (Dados meromorfos) *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e seja $X : U \rightarrow \mathbf{H}^3$ uma imersão conforme não-totalmente umbílica.*

Seja E a aplicação de Gauss Euclideana orientada de X . Assuma que X tenha curvatura média 1 com respeito a E (logo, E satisfaz a equação ()). Temos então que existem duas funções meromorfas h , T em U tal que*

$$E = h \cdot \left(\frac{Th_z + hT_z}{h^2T_z} \right) \left(T + \left(\frac{h_z}{Th_z + hT_z} \right) \right)$$

Além disso, a menos de uma constante positiva multiplicativa temos que

$$w = \frac{|h^2 T_z|^2}{|Th_z + hT_z|^2 + |h_z|^2}$$

$$G_z = h^2 T_z$$

então, a menos de uma constante positiva multiplicativa e de uma constante complexa aditiva, temos que

$$u + iv = G - wE$$

Portanto,

$$ds = |E_{\bar{z}} dz| = \frac{|hT_z h_{zz} - 2h_z^2 T_z - hh_z T_{zz}|}{|hT_z|^2} (1 + |T|^2) |dz|$$

$$\Pi = \Re\left(2 \frac{hT_z h_{zz} - 2h_z^2 T_z - hh_z T_{zz}}{h^2 T_z} (dz)^2\right) + ds^2 \quad (4)$$

$$g = T \text{ e } f = -\frac{1}{T_z} \cdot \frac{hT_z h_{zz} - 2h_z^2 T_z - hh_z T_{zz}}{h^2 T_z}$$

Vamos agora exibir famílias de superfícies completas e de curvatura média 1 de $\mathbf{H}^3$. Para saber maiores detalhes sobre as figuras consulte as referências citadas.

Na Figura 2, fazemos $\gamma = -1 + i$ (o parâmetro γ é o mesmo da equação (8)).

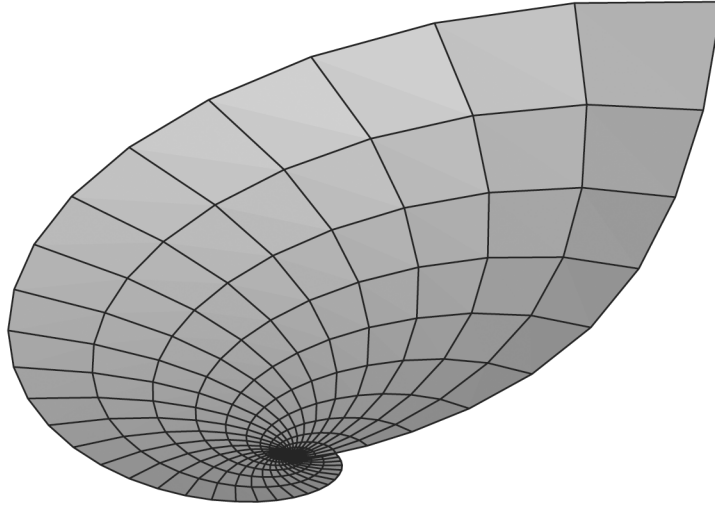


Figura 2

Nas Figura 3 e 4, são mostradas primas com fins imersos rodando em volta do eixo z (Metade desenhada).

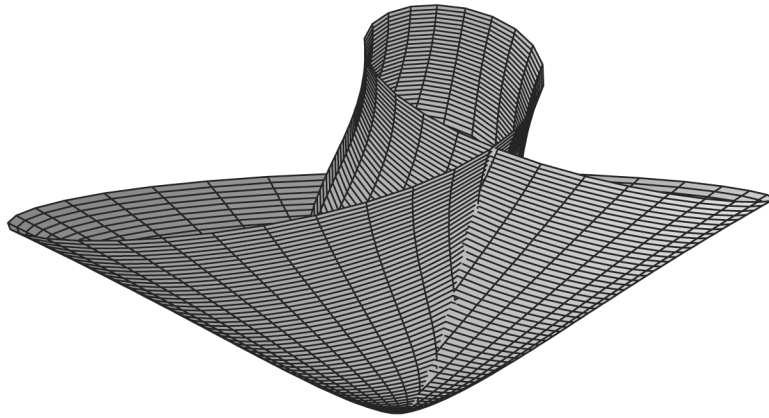


Figura 3
rodando duas vezes

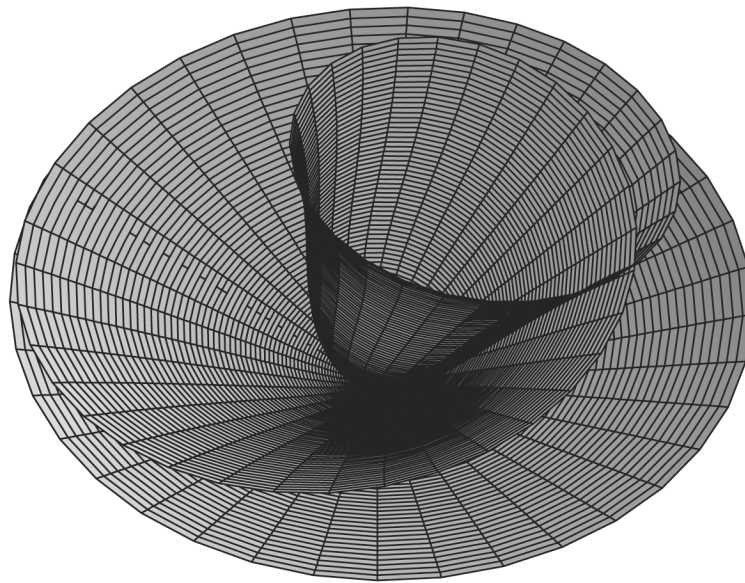


Figura 4
rodando três vezes

Nas Figuras 5 e 6 são mostradas primas com fins mergulhados rodando em volta do eixo z (Metade desenhada).

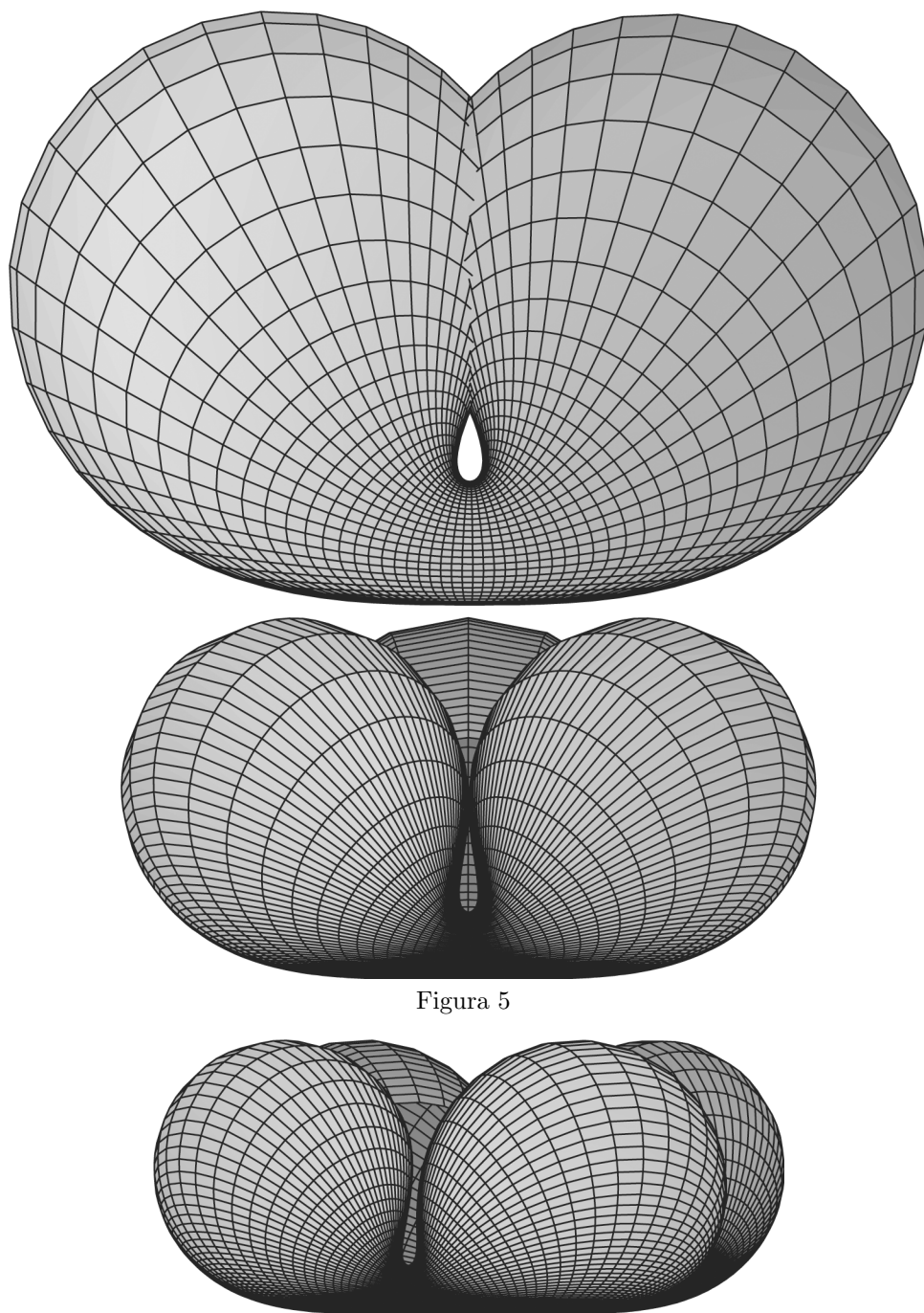


Figura 5

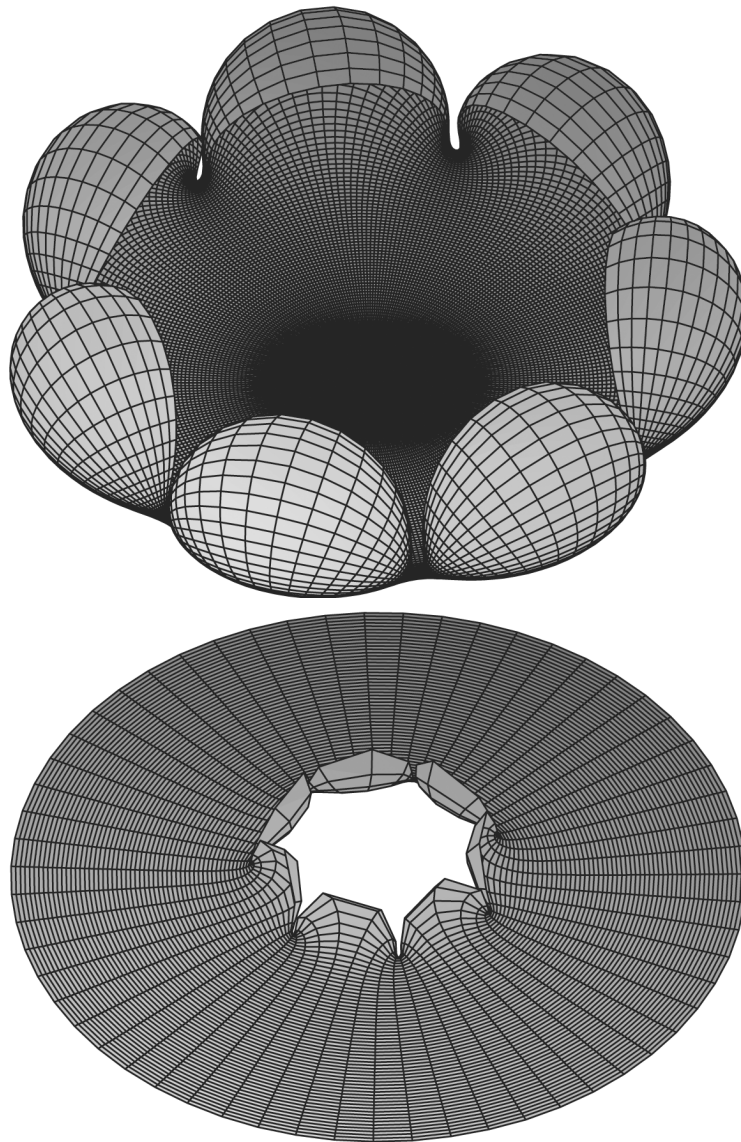


Figura 6

References

1. L. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
2. J. L. Barbosa e G. Colares. *Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Monografias de matemática, No 40, IMPA .

3. R. Bryant. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*. Asterisque **154-155**, Soc. Math de France, 321-347, 1987.
4. P. Collin. L. Hausswirth e H. Rosenberg. *The geometry of finite topology Bryant surfaces*. Ann. of Math. **153**, 623-659, 2001.
5. C. J. Costa. *Funções elípticas, algébricas e superfícies mínimas*. 18º colóquio brasileiro de matemática.
6. C. J. Costa e V. F. Sousa Neto. *Mean curvature 1 surfaces of Costa type in hyperbolic three-space*. Tohoku Math. J. **53**, 617-628, 2001.
7. M. do Carmo e A. M. da Silveira. *Index and total curvature surfaces with constant mean curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. **110**, 1009-1015, 1990.
8. M. do Carmo. *The index of constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3 -space*. Matem. Contemporânea **4**, 75-78, 1993.
9. M. E. Galvão e C. C. Góes. *A Weierstrass type representation for surfaces in hyperbolic space with mean curvature one*. Note Mat. **18**, 43-61, 1998.
10. J. M. Gomes. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Tese de Doutorado, IMPA, 1985.
11. D. Hoffman e H. Karcher. *Complete minimal surfaces of finite total curvature*. Encyclopaedia of mathematical sciences **90**, Geometry V, R. Osserman Editor, Springer, 5-93, 1997.
12. H. Hopf. *Differential geometry in the large*. Lecture Notes in Mathematics 1000, Springer, 1980.
13. K. Kenmotsu. *Lectures on deformable surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Preprint, 1995.
14. K. Kenmotsu. *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*. Math. Ann. **245**, 89-99, 1979.
15. M. Kokubu, M. Umehara e K. Yamada. *An elementary proof of Small's formula for null curves in $PSL(2, C)$ and an analogue for Legendrian curves in $PSL(2, C)$* . Preprint.
16. B. Lawson Jr. *Lectures on minimal submanifolds*. Mathematics lecture series **9**, Publish or Perish, 1980.
17. L. L. de Lima e P. Roitman. *CMC-1 surfaces in hyperbolic 3-space using the Bianchi-Calò method*. Preprint, 2001.
18. L. L. de Lima e W. Rossman. *On the index of mean curvature 1 surfaces in H^3* . Indiana Univ. Math. J. **47**, 685-723, 1998.
19. R. Narasimhan e Y. Nierverget. *Complex analysis in one variable*. Birkhäuser, 2001.
20. J. Ordóñez. *Superfícies helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensionais*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, 1995.
21. R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Dover, N. Y, segunda edição, 1986.

22. Poleni. *Revue du Palais de la Découverte*, **45**, pg 106, 1995.
23. M. Ritoré. *Examples of constant mean curvature surfaces obtained from harmonic maps to the two sphere*. Math. Z. **226**, 127-146, 1997.
24. W. Rossman e K. Sato. *Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space with two ends*. J. Exp. Math. **7**, No 1, 101-119, 1998.
25. W. Rossman, M. Umehara e K. Yamada. *Irreducible constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic space with positive genus*. Tôhoku Math. J. **49** 449-484, 1997.
26. W. Rossman, M. Umehara e K. Yamada. *A new flux for mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space, and applications*. Proc. Amer. Math. Soc. **127**, 2147-2154, 1999.
27. W. Rossman, M. Umehara e K. Yamada. *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature II*. Tohoku math. J. **55**, No 3, 2003.
28. W. Rossman, M. Umehara e K. Yamada. *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature I*. Preprint; math.DG/0008015.
29. W. Rossman, M. Umehara e K. Yamada. *Constructing mean curvature 1 surfaces in $\mathbf{H}^3$ with irregular ends*. Preprint.
30. R. Sá Earp and E. Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Diderot Editeur, Paris, 1997. Segunda edição, ed. Cassini, Paris (No Prelo).
31. R. Sa Earp e E. Toubiana. *On the geometry of constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space*. Illinois J. Math. **45**, No 2, 371-401, 2001.
32. R. Sa Earp e E. Toubiana. *Meromorphic data for mean curvature one surfaces in hyperbolic space*. A ser publicado no Tohoku Math. J.
33. R. Sa Earp e E. Toubiana. *Meromorphic data for mean curvature one surfaces in hyperbolic space, II*. Clay Mathematics Proceedings volume 3, 521-540, 2003.
34. R. Sa Earp e E. Toubiana. *A Weierstrass-Kenmotsu formula for prescribed mean curvature surfaces in hyperbolic space*. Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Institut Fourier de Grenoble **19** 9-23, 2001.
35. R. Schoen. *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*. J. Diff. Geom. **18** 791-809, 1983.
36. A. M. da Silveira. *Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature*. Math. Ann. **277** 629-638, 1987.
37. A. J. Small. *Surfaces of constant mean curvature 1 in $\mathbf{H}^3$ and algebraic curves on a quadric*. Proc. Amer. Math. Soc. **122** , 1211-1220, 1994.
38. M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* . Volume **IV**, second edition, 1979.
39. M. Umehara e K. Yamada. *Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space*. Annals of Math. **137**, 611-638, 1993.

- 40. M. Umehara and K. Yamada. *A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of some minimal surfaces in R^3 into the hyperbolic 3-space.* J. Reine Angew. Math. **432**, 93-116, 1992.
- 41. M. Umehara and K. Yamada. *Surfaces of constant mean curvature c in $H^3(-c^2)$ with prescribed Gauss map.* Math. Ann. **304**, 203-224, 1996.

Ricardo Sa Earp
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Depto de matemática
Rua Marquês de São Vicente 225
24 453-900 Rio de Janeiro-RJ, Brazil
fax:55-021-3114 1282
email: earp@mat.puc-rio.br