

# **B o l e t i m**

## **da**

# **Sociedade Paranaense de Matemática**

(Financiado pela Universidade Federal do Paraná)

Editado por  
ANTONIO MOCHON COSTA



2ª Série  
Vol. 1, Número 1  
ABRIL DE 1980



SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMÁTICA

Caixa Postal, 1261

CURITIBA — PARANÁ — BRASIL

SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMÁTICA  
Caixa Postal 1261  
80.000 - Curitiba - PR - Brasil

D I R E T O R I A

presidente: *Clóvis Pereira da Silva*  
Vice-Presidente: *Josef K. H. Dortmann*  
Secretário: *Florinda K. Miyaoka*  
Sub-Secretário: *Celso Carnieri*  
Tesoureiro: *Aurélío Sartorelli*  
Diretor Cultural: *Antonio Mochon Costa*

Este BOLETIM destina-se aos cursos de 2º grau  
e aos cursos de graduação das universidades

COMITÊ DE REDAÇÃO

Josef K. H. Dortmann  
Aurélío Sartorelli  
Florinda K. Miyaoka

Contribuições para este BOLETIM devem ser enviadas para o  
editor, professor Antonio Mochon Costa, em duas vias, e  
datilografadas em espaço duplo.

| SUMÁRIO DESTE NÚMERO                                   | pag. |
|--------------------------------------------------------|------|
| DORTMANN - O processo de passar ao limite              | 1    |
| KLEIS - Combinação com elementos duplos                | 15   |
| BARSOTTI - Influência dos problemas sobre a Matemática | 18   |
| TAVARES - Um método de ensino da Matemática            | 34   |
| SEÇÃO DE PROBLEMAS                                     | 38   |
| NOTICIÁRIO                                             | 40   |

P E D E - S E    P E R M U T A

# **Boletim** **da** **Sociedade Paranaense de Matemática**

(Financiado pela Universidade Federal do Paraná)

Editado por  
ANTONIO MOCHON COSTA



2ª Série  
Vol. 1, Número 1  
ABRIL DE 1980



SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMÁTICA

Caixa Postal, 1261

CURITIBA — PARANÁ — BRASIL

Bol. Soc. Paran. Mat. 2ª Série - Vol.1, n. 1, p. 1-42 Curitiba, abr. 1980





## O PROCESSO DE PASSAR AO LIMITE

Josef K. H. Dortmann

O processo de passar ao limite, ou a convergência, pode ser descrito em termos muito gerais. Na realidade, é perfeitamente possível construir uma teoria de limites usando somente o conceito de vizinhança de um ponto. Uma vez definida a convergência, conceitos como conjunto aberto, fecho, fronteira, etc., podem ser introduzidos e definidos em termos de convergência. A seguir, se por exemplo o espaço é um espaço vetorial como  $\mathbb{R}^n$ , a sua estrutura algébrica pode ser usada para definir soma e produto de limites. O processo é bastante geral e, por isso, mostra a natureza do conceito de convergência que, na reta  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{R}^n$ , é oculta pela abundância de resultados e detalhes.

Nosso objetivo é mostrar que a idéia de convergência é única, ou seja, que noções como a continuidade de uma função em um ponto, de limites de funções e limites de sequências são casos particulares de um só conceito. Para alcançar este objetivo, não há necessidade de seguir o processo acima descrito. A vizinhança de um ponto pode ser definida em termos de conjuntos abertos. Desta maneira, vamos desde já supor que está definida a estrutura topológica do espaço que, em nosso caso, é o espaço  $\mathbb{R}^n$ . O trabalho agora é mais simples e se restringe à descrição de um fenômeno conhecido em espaço conhecido, mas em ter-

mos talvez novos.

O problema da descrição de espaços mais gerais que o  $P^n$  (espaços topológicos) em termos de convergência foi resolvido por E.H.Moore e H.L.Smith em 1922. Um pouco mais tarde, H.Cartan desenvolveu uma teoria que se mostrou equivalente à de Moore e Smith. Além de resolver o problema acima citado, eles unificaram e generalizaram as teorias de limites existentes na época.

### NOTAÇÕES

Usamos a notação habitual da teoria dos conjuntos. Os símbolos  $R$ ,  $R^n$  e  $N$  indicam, respectivamente, o conjunto dos números reais, das  $n$ -uplas de números reais e dos números naturais.

Uma família de elementos em  $X$  com índices em um conjunto  $L$  é uma função  $A : L \rightarrow X$ . Em vez de  $A(\alpha)$  escrevemos  $A_\alpha$ . A família será indicada por  $\{A_\alpha : \alpha \in L\}$ . Geralmente o contradomínio da função  $A$  é um subconjunto do conjunto das partes de um certo conjunto dado. Se  $X$  é um conjunto,  $P(X)$  representa o conjunto das partes de  $X$ . Se, por exemplo, a função  $V : N \rightarrow P(N)$  é definida por  $V(p) = V_p = \{n \in N : p \geq n\}$ , então  $V_{10} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Representaremos a família  $\{V_p : p \in N\}$  por  $V_N$ . Um outro exemplo é dado pela função  $B : N \rightarrow P(R)$ , definida por  $B_n = (b-1/n, b+1/n)$  com  $b \in R$ . Representaremos  $B_n$  por  $B(b, 1/n)$ . A família  $B_b = \{B_n : n \in N\}$  é a família dos intervalos abertos de centro em  $b$  e raio  $1/n$ . Analogamente, em  $R^n$  a família  $B_b$  representa a família das bolas abertas de centro em  $b$  e

raio  $1/n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Uma outra família de interesse é a família  $\mathcal{B}_{b,\delta} = \{B_\delta : \delta \in \mathbb{R}^+\}$  com  $B_\delta = (b-\delta, b+\delta)$  e onde  $\mathbb{R}^+$  é o conjunto dos números reais positivos. Em  $\mathbb{R}^n$  a mesma família representa a coleção das bolas abertas de centro em  $b$  e raio  $\delta$ .

Um conjunto  $A$  é aberto quando para cada um de seus pontos  $b$  existe  $B_\delta \subset A$ . Uma vizinhança  $V_b$  de um ponto  $b$  é um aberto que contém  $b$ . A família das vizinhanças do ponto  $b$  será indicada por  $\mathcal{V}_b$ .

O conjunto  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  é a reta estendida  $\mathbb{R}^0$ . Se  $b$  é elemento de  $\mathbb{R}$ , os intervalos  $(-\infty, b)$  e  $(b, +\infty)$ , considerados como subconjuntos de  $\mathbb{R}^0$ , são vizinhanças de  $-\infty$ , e  $+\infty$ , respectivamente. A família das vizinhanças de  $+\infty$  será indicada por  $\mathcal{V}_\infty$ .

Um ponto  $b$  é ponto de aderência de  $X$  quando  $V_b \cap X \neq \emptyset$  para toda vizinhança  $V_b$ . O conjunto dos pontos de aderência é o fecho  $\overline{X}$  de  $X$ . Se  $(V_b - \{b\}) \cap X \neq \emptyset$  para todo  $V_b$ , então  $b$  é um ponto de acumulação de  $X$ . O conjunto dos pontos de acumulação de  $X$  é o conjunto derivado  $X'$  de  $X$ . Mostra-se que  $\overline{X} = X \cup X'$ . Observemos que em  $\mathbb{R}^0$ , os elementos  $-\infty$  e  $+\infty$  são pontos de acumulação de  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^0$ , e que o elemento  $+\infty = \infty$  é ponto de acumulação de  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^0$ . Um ponto  $b \in X$  é ponto isolado de  $X$  quando existe uma vizinhança  $V_b$ , tal que  $V_b \cap X = \{b\}$ . Para todo  $b \in X$ , ou  $b$  é ponto de acumulação ou  $b$  é ponto isolado de  $X$ .

Um conjunto  $A$  é aberto em  $X$  quando existe aberto  $I \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $A = I \cap X$ . Os abertos em  $X$  podem assumir formas pouco ortodoxas, dependendo do conjunto  $X$ . Se, por exemplo,  $X$  é o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , en

tão  $\{n\}$  é aberto em  $R$ , pois basta escolher  $I = (n-1, n+1)$  (que é aberto em  $R$ ) e temos que  $\{n\} = I \cap N$ . Desta maneira, os conjuntos  $V_p$  da família  $V_N$  são abertos em  $N$ . Se  $X$  é aberto em  $R^n$ , os abertos em  $X$  são os subconjuntos de  $X$  abertos em  $R^n$ .

Se  $b \in \bar{X}$ , então  $V_b \cap X = \{V_b \cap X : V_b \in V_b\}$  indica a família das vizinhanças do ponto  $b$  no conjunto  $X$ , e  $V_b - \{b\}$  representa a família  $\{V_b - \{b\} : V_b \in V_b\}$ .

### I. DIREÇÕES

Definição I.1. Uma família  $A = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$  de subconjuntos de  $X$  é uma direção em  $X$  quando:

- (1)  $A_\alpha \neq \emptyset$  para todo  $\alpha \in L$ ;
- (2) se  $\alpha, \beta \in L$ , então existe  $\gamma \in L$  tal que  $A_\gamma$  está contido em  $A_\alpha \cap A_\beta$ .

É uma consequência direta da definição I.1 que a interseção de um número finito de elementos de uma direção é conjunto não vazio.

Notemos que o conjunto de índices  $L$  pode ser finito. Se, por exemplo,  $A = \{A\}$ , então  $A$  é uma direção. A família  $B_1 \cap X$  é uma direção em  $X = (0,1)$ . Para todo  $b \in R$ , as famílias  $V_b$  e  $B_b$  são direções em  $R$ .

Definição I.2. Uma direção  $A = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$  em  $X$  converge para o ponto  $b$  se, e somente se, para todo  $V_b \in V_b$ , existir  $A_\alpha \in A$  tal que  $A_\alpha \subset V_b \cap X$ .

Para indicar que a direção converge para  $b$  escrevemos  $A \rightarrow b$ .

É fácil verificar que em  $R^0$ : (i)  $V_N \rightarrow \infty$ ; (ii) as fa

mílias  $V_b$  e  $B_b$  convergem para  $b$ ; (iii) se  $b \in \bar{X}$ , então as direções  $V_b \cap X$ ,  $B_b \cap X$ ,  $V_b - \{b\}$  e  $B_b - \{b\}$  convergem para o ponto  $b$ ; (iv) a direção  $A = (0, 1/n) \cup (2, 2 + \frac{1}{n})$  não é convergente.

Se  $X = (0, 1) \cup \{2\}$ , então 2 é ponto isolado de  $X$  e  $B_{2, \delta} \rightarrow 2$ , pois dado  $V_2$  basta escolher  $B_\delta = B_1$  e resulta  $B_1 \cap X = \{2\}$ , que é subconjunto de  $V_2$ .

Em todos os exemplos verifica-se que o ponto de convergência, quando existe, é único. Isto sempre acontece em  $R^n$  e deve-se ao fato de que dois pontos distintos  $b$  e  $c$  podem ser separados por vizinhanças disjuntas. Em outros termos: se  $b, c \in R^n$  e  $b \neq c$ , então existem  $V_b$  e  $V_c$  disjuntas.

Proposição I.1. Uma direção  $A = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$  não pode convergir para dois pontos distintos.

Demonstração. Suponhamos que  $A \rightarrow b$  e  $A \rightarrow c$ , com  $b \neq c$ . Então existem  $V_b$  e  $V_c$  com  $V_b \cap V_c = \emptyset$ .  $A \rightarrow b$  implica que existe  $A_\alpha \in A$  com  $A_\alpha \subset V_b$ ;  $A \rightarrow c$  implica que existe  $A_\beta \in A$  com  $A_\beta \subset V_c$ . Mas neste caso  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$  e  $A$  não pode ser direção ■

Se  $A$  é direção em  $X$  e  $f: X \rightarrow Y$ , então a imagem da família  $A$  pela  $f$  é uma direção em  $f(X)$ . Para demonstrar esta afirmação precisamos de duas propriedades da imagem direta de uma função, a saber:

(i) Se  $A \subset B$ , então  $f(A) \subset f(B)$ ,

(ii)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

Seja, agora,  $A = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$  uma direção em  $X$  e  $f: X \rightarrow Y$ . É claro que se  $A_\alpha \in A$ , então  $A_\alpha \neq \emptyset$  e  $f(A_\alpha) \neq \emptyset$ . Além disso,  $f(A_\alpha)$  é subconjunto de  $f(X)$ . Para todos  $\alpha$  e  $\beta$  de  $L$

existe  $\gamma \in L$ , tal que  $A_\gamma \subset A_\alpha \cap A_\beta$ . Então,  $f(A_\gamma)$  está con-  
tido em  $f(A_\alpha \cap A_\beta) \subset f(A_\alpha) \cap f(A_\beta)$ . Seja  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  da-  
da por

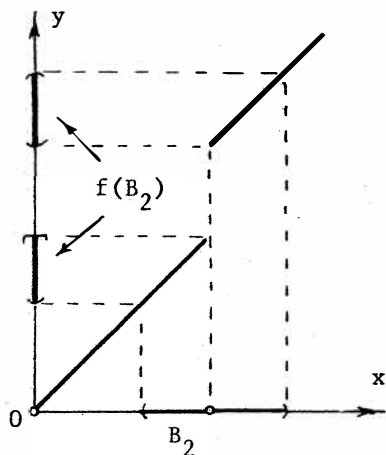
$$f(x) = x \text{ se } x \in [0,1]$$

$$f(x) = x+1 \text{ se } x \in (1,2].$$

Temos que  $B_1 \rightarrow 1$ . Se  
 $B_n = (1-1/n, 1+1/n)$ , então  
 $f(B_n)$  é igual a união  
 $(1-1/n, 1] \cup (2, 2+1/n)$ .

A direção  $f(B_1)$  não con-  
verge em  $f(X)$ .

Estamos agora em con-  
dições de definir a conti-  
nuidade de uma função em  
um ponto. A definição é importante, pois engloba também a  
passagem ao limite nas suas diversas formas.



Definição I.3.  $f: X \rightarrow Y$  é contínua em  $b \in X$ , se, e  
somente se,  $f(V_b \cap X) \rightarrow f(b)$ . A função será contínua em  
 $X$  quando for contínua em todos os pontos de  $X$ .

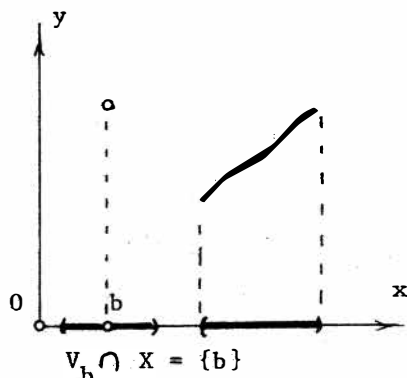
Seguindo um costume bastante difundido, escreveremos  
 $f(V_b)$  em vez de  $f(V_b \cap X)$ . Subentende-se, então, que as  
vizinhanças  $V_b$  são vizinhanças em  $X$ .

Notemos que  $f(V_b) \rightarrow f(b)$  significa que para todo  
 $V_{f(b)}$  existe  $V_b$  tal que  $f(V_b) \subset V_{f(b)}$ , o que é a conheci-  
da definição de continuidade de uma função em  $x = b$ .

Vejamos alguns exemplos de funções contínuas. Se  
 $f: X \rightarrow Y$  é função constante definida por  $f(x) = c$ , en-  
tão ela é contínua em  $X$ . Pois, para um ponto  $b \in X$  temos  
que  $f(V_b) = \{f(v_b): v_b \in V_b\} = \{c\} \rightarrow c = f(b)$ . Também

é contínua a função identidade  $i : X \rightarrow X$  com  $f(x) = x$ , pois  $i(V_b) = V_b \rightarrow b = i(b)$ .

Seja  $f : X \rightarrow Y$  e seja  $b$  ponto isolado de  $X$ . Então  $f$  é contínua em  $b$ . Sendo  $b$  ponto isolado de  $X$ , podemos escolher  $V_b$  tal que  $V_b \cap X = \{b\}$ . Seja agora  $A = \{V_b : V_b \cap X = \{b\}\}$ . Evidentemente,  $A \rightarrow b$  e  $f(A) = f\{V_b : V_b \cap X = \{b\}\} = f(\{b\}) = \{f(b)\} \rightarrow f(b)$ .



Isso mostra que, qualquer que seja o valor escolhido para  $f(b)$ , a função  $f$  será contínua em  $x = b$ .

## II. SUBDIREÇÕES

A definição da continuidade de uma função em um ponto é dada em termos da família das vizinhanças do mesmo ponto. Esta família é realmente "grande" e um dos objetivos da introdução do conceito de subdireção é a substituição de  $V_b$  por outras famílias, "menores" e de manuseio mais fácil. Também a noção de subsequência encontra sua expressão mais natural em termos de subdireções.

Definição II.1. Sejam  $A = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$  e  $B = \{B_\beta : \beta \in M\}$  direções. Dizemos que  $B$  é subdireção de  $A$  quando para todo  $A_\alpha \in A$ , existe  $B_\beta \in B$  tal que  $B_\beta \subset A_\alpha$ . Neste caso escrevemos  $A \vdash B$ .

Se  $A \subset B$ , então  $B \vdash A$ . Pois temos que para todo

$A_\alpha \in A$ ,  $A_\alpha \in B$  e sendo  $B$  uma direção, existe  $B_\beta$  em  $B$  tal que  $B \subset A$ . Da definição das famílias  $B_b$  e  $V_b$  resulta que uma é subdireção da outra, ou seja,  $B_b \vdash\vdash V_b \vdash\vdash B_b$ . Com relação a subdireções mostra-se ainda o seguinte:

(1) Se  $A_N$  é direção em  $N$ ,  $A_N \vdash\vdash N$  e  $A_p \vdash\vdash A_N$ , então  $A_p$  é subconjunto infinito de  $N$ .

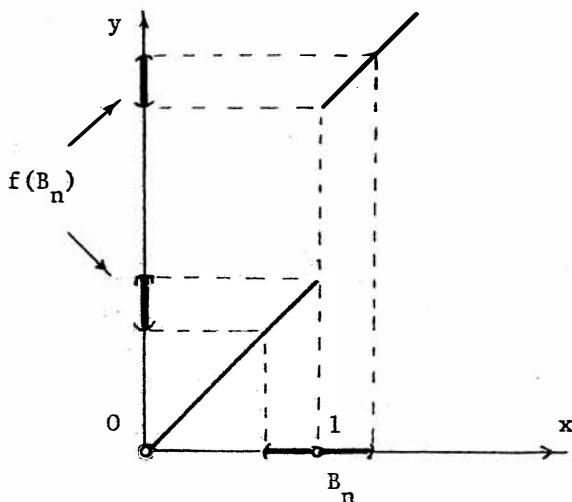
(2) Se  $A$  e  $B$  são direções em  $X$  com  $B \vdash\vdash A$  e  $f: X \rightarrow Y$ , então também  $f(B) \vdash\vdash f(A)$ .

Proposição II.1. Seja  $A$  direção.  $A \rightarrow b$  se, e somente se,  $A \vdash\vdash V_b$ .

Demonstração. Se  $A \rightarrow b$ , então para todo  $V_b \in V_b$ , existe  $A_\alpha \in A$  tal que  $A_\alpha \subset V_b$ , e concluímos que  $A \vdash\vdash V_b$ . Reciprocamente, seja  $A \vdash\vdash V_b$ . Para todo  $V_b \in V_b$  existe  $A_\alpha \subset V_b$ . Pela definição da convergência resulta  $A \rightarrow b$ .

No que diz respeito a continuidade, podemos agora substituir a família  $V_b$  pela família  $B_b$ . Pois de  $B_b \vdash\vdash V_b \vdash\vdash B_b$  resulta que  $f(B_b) \vdash\vdash f(V_b) \vdash\vdash f(B_b)$  e a proposição II.1 permite concluir que  $f(B_b) \rightarrow c$  se, e somente se,  $f(V_b) \rightarrow c$ . Vejamos um exemplo: Uma função  $f: X \rightarrow Y$  não é contínua em  $b \in X$  quando existe  $V_{f(b)}$  tal que para todo  $B_n \in B_b$  se verifica que  $f(B_n) \not\subset V_{f(b)}$ . Consideremos a função  $f: X \rightarrow Y$  com  $X = [0, 2]$  e  $f$  definida por  $f(x) = x$  se  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x + 1$  se  $x \in (1, 2]$ . Sendo  $B_n \in B_1$ , o intervalo  $(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$  é subconjunto de  $X$  e temos que  $f(B_n) = (1 - \frac{1}{n}, 1] \cup (2, 2 + \frac{1}{n})$ , para todo  $n$ . Escolhendo agora  $V_{f(1)} = (0, 2)$ , é óbvio que  $f(B_n) \not\subset V_{f(1)}$  e a  $f$  não pode ser contínua em  $x = 1$ .





### III. LIMITES

Pequenas modificações na definição de continuidade de uma função em um ponto caracterizam o limite da função e também de seqüências, como um caso particular da continuidade. Os casos de limites infinitos, no infinito e limites de seqüências se enquadram naturalmente.

Os dois problemas que apresentamos a seguir são problemas básicos dos limites de funções.

(1) Seja  $f : X \rightarrow Y$  e  $b \in X' - X$ . Existe  $F : X \cup \{b\} \rightarrow Y$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$  e  $F$  contínua em  $x = b$ ?

(2) Seja  $f : X \rightarrow Y$  descontínua em  $x = b$ . Existe função  $F : X \rightarrow Y$ , tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x \in X - \{b\}$  e  $F$  contínua em  $x = b$ ?

Se a resposta à primeira pergunta é afirmativa, então podemos estender a função  $f$  continuamente ao ponto  $b$

de  $X' - X$ . A solução do segundo problema abre a possibilidade de redefinir a função  $f$  no ponto  $x = b$ , de tal modo que a nova função  $F$  se torne contínua neste ponto. Em ambos os casos, o valor da função  $F$  no ponto  $b$ , se existir, será chamado limite da função  $f$  no ponto  $x = b$ .

Examinando o primeiro problema, fica claro que a condição de continuidade da  $F$  em  $x = b$  exige que  $F(V_b)$  seja convergente. Mas  $b \notin X$  e  $f(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$  permitem identificar  $f(V_b)$  com  $F(V_b)$ . Se agora  $f(V_b)$  converge para o ponto  $c$ , então basta por  $F(b) = c$  e a função  $F$  satisfaz as condições do primeiro problema; isto é,  $F(x)$  é igual a  $f(x)$  para todo  $x \in X$  e  $F$  é contínua em  $x = b$ .

No segundo problema, observemos que  $f$  descontínua em  $x = b$  quer dizer que a direção  $f(V_b)$  não converge para  $f(b)$ . Mas pode muito bem acontecer que  $f(V_b - \{b\})$  seja convergente. Se  $f(V_b - \{b\}) \rightarrow c$ , então a exigência da continuidade de  $F$  em  $x = b$  impõe de novo a escolha  $F(b) = c$ .

No primeiro problema, exigir a convergência de  $f(V_b)$  é equivalente a exigir a convergência de  $f(V_b - \{b\})$ , pois  $b \notin X$ . Nos dois casos, a convergência da direção  $f(V_b - \{b\})$  resolve o problema. Temos, então, a seguinte definição.

**Definição III.1.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  e  $b \in X'$ . A função  $f$  possui limite no ponto  $x = b$  se, e só se,  $f(V_b - \{b\})$  é convergente. Se  $f(V_b - \{b\}) \rightarrow c$ , então  $c$  é o limite da função  $f$  no ponto  $x = b$  e escrevemos  $\lim_b f(x) = c$ .

A unicidade do limite, quando existe, é garantida pela proposição I.1.

Uma função pode não ter extensão contínua no ponto  $b \in X' - X$ . Seja  $X = \mathbb{R}^+$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1/x$ . Então  $0 \in X' - X$  e  $B_0 \cap X \rightarrow 0$ . Mas, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $B_n \in B_0$ , temos  $B_n \cap X = (0, 1/n)$ ,  $f(B_n) = (n, \infty) \in \mathcal{V}_N$  e  $f(B_0) \rightarrow \infty$ . A função  $f$  não possui limite em  $x = 0$ .

No processo de passar ao limite, a condição de que  $b$  seja ponto de acumulação de  $X$  é essencial. Pois se  $b$  não é ponto de acumulação de  $X$ , necessariamente é ponto isolado de  $X$  e  $f(\mathcal{V}_b)$  pode convergir para qualquer ponto.

Não há necessidade de reformular a definição III.1 para o caso de limites no infinito e limites infinitos. Se  $f : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\infty$  é ponto de acumulação de  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^0$ . Neste caso,  $\lim_{\infty} f(x) = b$  significa que para todo  $V_b$ , existe  $V_{\infty}$ , tal que  $f(V_{\infty}) \subset V_b$ . A função  $f : \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1/x$  é um exemplo. Se  $V = (a, \infty)$ , então  $f(V) = (0, 1/a)$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Resulta que  $f(V_{\infty}) \rightarrow 0$  e  $\lim_{\infty} f(x) = 0$ . Da mesma maneira,  $\lim f(x) = \infty$  quer dizer que  $f(V_b - \{b\}) \rightarrow \infty$  ou, para todo  $V \in \mathcal{V}_{\infty}$  existe  $V_b$  tal que  $f(V_b - \{b\}) \subset V$ .

O limite de uma sequência também se enquadra na definição III.1. Uma sequência em  $X$  é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Em vez de  $x(n)$  escrevemos  $x_n$ . A sequência será indicada por  $(x_n)$ . Observemos que  $\infty$  é ponto de acumulação de  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^0$ .

Dizer que a sequência  $(x_n)$  tem por limite o ponto  $b$  (escrevemos  $x_n \rightarrow b$ ), significa que para toda vizinhança  $V_b$  existe  $V_{\infty}$  tal que  $x(V_{\infty} \cap \mathbb{N}) \rightarrow b$ . Mas  $V_{\infty} \cap \mathbb{N}$  é um conjunto do tipo  $V_p \in \mathcal{V}_N$  e  $x(V_{\infty} \cap \mathbb{N}) \rightarrow b$  quer dizer que da

do  $V_b$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n \geq p$ , então  $x_n \in V_b$ .

Se  $A_N$  é subdireção de  $V_N$ , então o conjunto  $D = \bigcup A_p$ , com  $A_p \in A_N$  é subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$  e possui  $\infty$  como ponto de acumulação. Seja, agora  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  uma sequência,  $A_N \vdash V_N$  e  $D = \bigcup A_p, A_p \in A_N$ . A restrição  $x|_D$  de  $D$  em  $X$  define uma subsequência da sequência  $(x_n)$ . A proposição II.1 permite afirmar que uma sequência converge para um ponto  $b$  se, e somente se, qualquer subsequência da sequência dada converge para o mesmo ponto  $b$ .

#### IV. CONVERGÊNCIA E NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Todas as noções topológicas do espaço  $\mathbb{R}^n$  podem ser expressas em termos de limites de sequências.

Se  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  é uma sequência convergindo para  $b$ , então  $x(V_N)$  é direção em  $X$  e, pela proposição II.1 resulta que  $x(V_N) \vdash V_b$ .

Proposição IV.1. Um ponto  $b$  é ponto de aderência de  $X$  se, e só se, existir sequência  $(x_n)$  em  $X$ , com  $x_n \rightarrow b$ .

Demonstração. Se  $b \in \overline{X}$ , então  $B_n \cap X \neq \emptyset$  para todo  $B_n \in \mathcal{B}_b$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $B_n \in \mathcal{B}_b$ , escolhemos  $x_n$  em  $B_n$ . A sequência  $x_n \rightarrow b$ . Reciprocamente, se  $x_n \rightarrow b$ , então  $x(V_N)$  é direção em  $X$  e  $x(V_N) \rightarrow b$ . Pela proposição II.1 temos que  $x(V_N) \vdash V_b$ . Logo, para todo  $V_b \in \mathcal{V}_b$  existe  $x(V_p) \subset V_b$ . Temos que  $x(V_p) \cap X \subset V_b \cap X$  e  $V_b \cap X \neq \emptyset$ .

Da mesma maneira mostra-se que  $b$  é ponto de acumulação de  $X$  quando existe uma sequência  $(x_n)$  em  $X - \{b\}$ , convergindo para o ponto  $b$ .

Proposição IV.2. Seja  $f : X \rightarrow Y$ ,  $b \in X$  e  $(x_n)$  sequência em  $X$  convergindo para  $b$ . A função  $f$  é contínua em  $b \in X$  se, e somente se,  $f(x_n) \rightarrow f(b)$ .

Demonstração. Seja  $f : X \rightarrow Y$  contínua no ponto  $b \in X$  e  $x_n \rightarrow b$ . Então  $x(V_N) \vdash V_b$  e  $f(x(V_N)) \vdash f(V_b)$ . Como  $f(V_b) \rightarrow b$ , temos que  $f(x(V_N))$  converge para  $f(b)$  e  $f(x_n) \rightarrow f(b)$ . Para mostrar a recíproca, suponhamos que  $f$  não seja contínua em  $b \in X$ . Isto quer dizer que existe  $V_{f(b)}$  tal que para todo  $B_n \in \mathcal{B}_b$  se verifica que  $f(B_n) \not\subset V_{f(b)}$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $B_n$  escolhemos  $x_n \in B_n$  tal que  $f(x_n) \notin V_{f(b)}$ . Isto define uma sequência  $(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow b$ , mas  $f(x_n) \not\rightarrow f(b)$  ■

Não há mais dificuldades em exprimir os conceitos restantes em termos de limites de sequências. Assim, por exemplo, mostra-se sem dificuldades que:

- (1) Um ponto  $b$  pertence a fronteira de  $X$  quando é limite de uma sequência em  $X$  e limite de uma sequência em  $\mathbb{R}^n - X$ .
- (2)  $X$  é denso em  $\mathbb{R}^n$  quando todo ponto em  $\mathbb{R}^n$  é limite de sequência em  $X$ .

A definição de limite é, evidentemente, um caso particular da continuidade de uma função  $f : X \rightarrow Y$  em um ponto  $b \in X$ . Mas, o que determina a continuidade da  $f$  é a direção  $f(V_b)$  em  $Y$ . Se pensarmos na função  $f$  como um dispositivo que serve para definir direções em  $Y$ , então é óbvio que a continuidade também pode ser considerada um caso particular da convergência de direções.

Nada impede agora devolver às definições o seu aspecto usual e aproveitar as operações para obter todos os resultados da convergência em  $\mathbb{R}_n$ .

## REFERÊNCIAS

1. CARTAN, H. - Théorie des filtres. *Comptes Rendus Paris* 205 (1937).
2. DIEUDONNÉ, J. - *Foundations of modern analysis*. Academic Press, 1960.
3. DUGUNDJI, J. - *Topology*. Allyn and Bacon, 1976.
4. KELLEY, J.L. - *General topology*. D.van Nostrand, 1955.
5. MC SHANE, E.J. - A theory of limits. *Studies in modern analysis*. Math.Assoc.America, 1962.
6. MOORE, E.H & H.L.SMITH - A general theory of limits. *Amer.J.Math.* 44 (1922).

Universidade Federal do Paraná

## COMBINAÇÃO COM ELEMENTOS DUPLOS

Alexandre Machado Kleis

### 1. Introdução.

Em vários jogos de cartas utilizam-se dois baralhos. Surge a questão: quantas "mãos" (grupos distintos de cartas) com  $p$  cartas (o que varia de jogo para jogo) podem ser formadas a partir das  $2m$  cartas (se cada baralho tiver  $m$  delas)?

Assim, o problema de calcular o número de combinações de  $2m$  objetos (apenas  $m$  dos quais distintos), em grupos de  $p$  objetos, reduz-se a calcular o número  $N$  de combinações que podem ser formadas com  $m$  objetos, em grupos de  $p$ , admitindo-se que cada um dos  $m$  objetos possa aparecer no máximo duas vezes.

### 2. Cálculos.

2.1.  $p$  é par. Dado um conjunto finito  $S$  de  $m$  elementos, consideremos a combinação

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_r a_r,$$

na qual cada elemento aparece duas vezes, sendo  $0 < r \leq m$  e  $a_1, a_2, \dots, a_r$  elementos de  $S$ . O número total destas combinações é, obviamente,  $\binom{m}{r}$ .

Seja, agora,  $N_s$  o número total das combinações de  $p$  elementos da forma

$$(1) \quad a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_s a_s b_1 b_2 \dots b_{p-2s},$$

onde  $0 \leq s \leq p/2$  e  $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_{p-2s}$  são elementos de  $S$ . Tais combinações retratam todas as possíveis

dos  $m$  elementos de  $S$  em grupos de  $p$ , segundo a regra explicitada na introdução, e se observando:

a) se  $s = 0$ , as combinações (1) assumem a forma

$$b_1 b_2 \dots b_p ;$$

b) se  $s = p/2$ , as combinações (1) assumem a forma

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_{p/2} a_{p/2} .$$

Ora, é fácil ver que

$$N_s = \binom{m}{s} \binom{m-s}{p-2s} .$$

Então, o número  $N$  de combinações mencionado na introdução é

$$N = \sum_{s=0}^{p/2} N_s = \sum_{s=0}^{p/2} \binom{m}{s} \binom{m-s}{p-2s} .$$

2.2.  $p$  é ímpar. Considerações análogas às anteriores mostram que, para o caso em que  $p$  é ímpar,

$$N = \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{m}{s} \binom{m-s}{p-2s} .$$

2.3. *Generalização.* Introduzindo a notação  $[x]$  para o maior inteiro contido em  $x$ , temos

$$N = \sum_{s=0}^{[p/2]} \binom{m}{s} \binom{m-s}{p-2s} .$$

Às vezes é conveniente pôr  $CD_{m,p}$  ao invés de  $N$ .

### 3. Exemplo.

Dado o conjunto  $S = \{a, b, c, d, e\}$  ( $m = 5$ ), calculemos o número de combinações de seus elementos em grupos de quatro ( $p = 4$ ), admitindo-se para tal, que cada um deles possa aparecer no máximo duas vezes.



*Solução:*

$$CD_{5,4} = \sum_{s=0}^2 \binom{5}{s} \binom{5-s}{4-2s} = \binom{5}{0} \binom{5}{4} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \binom{3}{0} = 45,$$

Tais combinações são:

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| abcd | aabc | aade | bbac | bbde | ccad | ccdd | ddbc | eeac |
| abce | aabd | aabb | bbad | bbcc | ccae | ccee | ddbe | eead |
| abde | aabe | aacc | baae | bbdd | ccbd | ddab | ddce | eebc |
| acde | aacd | aadd | bbcd | bbee | ccbe | ddac | ddee | eebd |
| bcde | aace | aaee | bbce | ccab | ccde | ddae | eeab | eedd |

#### 4. Observação.

Em [1], p.183 e seguintes, Madsen Barbosa mostra um outro método que pode ser aplicado ao caso estudado. Basta calcular o coeficiente de  $t^p$  em  $(1 + t + t^2)^m$ , o que requer mais cálculos numéricos.

#### R E F E R Ê N C I A

1. Barbosa, R.M. - *Combinatória e grafos*, v.1, Liv.Nobel, São Paulo, 1974.

Universidade Federal do Paraná

## INFLUÊNCIA DOS PROBLEMAS SOBRE A MATEMÁTICA

Leo Barsotti

Não vou discorrer sobre a utilidade da resolução de problemas propostos em livros-textos como parte essencial do aprendizado da Matemática, o que é sobejamente conhecido, mas sobre a importância de uma outra categoria de problemas usualmente não apresentados em tais livros, por ainda não ser conhecida sua solução, porém fundamentais para o desenvolvimento da Matemática.

Cada época tem seus problemas científicos que a época seguinte resolve ou deixa de lado como estéreis, substituindo-os por outros. A grande influência de certos problemas bem determinados no progresso geral da ciência matemática é não menos incontestável do que a influência de tais problemas sobre o trabalho particular do pesquisador, e a vitalidade de qualquer ramo da Matemática é proporcional à abundância de seus problemas. Sem problemas não há pesquisa matemática. A força do pesquisador se aplica a sua resolução e acaba por descobrir novos métodos ou novos pontos de vista que lhe permitem descortinar novos horizontes. É difícil, às vezes impossível, prejudicar o valor de um problema; é apenas o proveito que as ciências tiram de sua resolução ou que a Matemática tira de sua não resolução, motivadora da criação de novos métodos, que permitem avaliar a importância de dado problema.

Para ser atraente, um problema matemático deve ser difícil, mas não inabordável, freqüentemente de aparência

simples; deve ser um verdadeiro guia que dirija o pesquisador através dos labirintos de idéias dispersivas e enganosas, levando-o a descobrir verdades ocultas e recompensando seus esforços com a alegria que lhe proporciona a descoberta da solução. Os matemáticos de todas as épocas se ocuparam com ardor da solução de problemas difíceis. Lembro, entre outros, a descoberta dos números irracionais feita pelos pitagóricos e guardada como terrível segredo, punível com a morte dos que o divulgassem. São célebres os problemas geométricos da trissecção do ângulo, da duplicação do cubo e da quadratura do círculo, o primeiro solúvel somente para certos casos particulares, e o segundo, equivalente a construção com régua e compasso da  $3^{\text{a}}$  2, provada impossível no século passado. Também notável é o da divisão da circunferência em partes iguais, com régua e compasso, que foi resolvida por Gauss ao provar que só se pode efetuá-la para partes iguais cujo número  $n$  seja da forma  $n = 2^h p_1 \dots p_k$ , os  $p_i$  sendo números primos da forma  $2^p + 1$ .

Outros problemas conduziram à criação de novos ramos da Matemática. Por exemplo, durante muito tempo procurou-se demonstrar o postulado das paralelas de Euclides, pois parecia que ele devia ser um teorema, logicamente dedutível dos outros. Tentativa célebre neste sentido deve-se a Saccheri, que, por pouco, deixou de descobrir as geometrias não euclidianas. Partindo da negação de tal postulado de Euclides, mediante deduções lógicas procurou chegar a uma contradição que comprovaria a necessidade do postulado das paralelas. Jamais a encontrou, mas, mesmo assim, estava convicto que ele era a única hipótese viável. O

primeiro matemático a admitir a possibilidade de outras hipóteses diferentes da de Euclides, foi Gauss, que infelizmente, com receio dos boões, não divulgou seus resultados. Daí a glória da descoberta das Geometrias não euclidianas ser atribuída a Bolyai e a Lobatchevski, para a hipótese de existir mais de uma paralela, e a Riemann, na suposição de não existirem paralelas.

São bem conhecidos os problemas que levaram Newton e Leibniz à criação do Cálculo Diferencial e Integral; o problema das velocidades e o problema das tangentes a uma curva. Relacionado com o Cálculo Infinitesimal tem-se outro problema célebre, o da braquistócrona, que nasceu da rivalidade entre os irmãos James e Jean Bernoulli. Em 1696, Jean Bernoulli, o mais moço, propôs o problema da braquistócrona e publicamente desafiou os matemáticos do mundo a resolvê-lo. Consiste em achar a trajetória a ser seguida por uma partícula pesada que cai de um ponto A para outro B, não na mesma vertical mas em nível inferior a A, de modo que o tempo para ir de A para B seja mínimo. Embora a solução dada pelo proponente seja mais elegante que a de seu irmão James, o método deste era mais geral e deu início a longa série de pesquisas que levou à criação do Cálculo das Variações, como hoje é conhecida a parte da Matemática que trata de tal tipo de problemas de máximos e mínimos. O cálculo das variações também resolve outro célebre problema, o dos isoperímetros ou de Dido, cuja origem é lendária. Conta-se que Dido foi acolhida por um soberano do norte da África, e tendo caído nas boas graças deste, conseguiu que se lhe desse tanta terra quanto pudesse delimitar com um couro de boi. Cortando tal

couro em tiras extremamente finas, com ela delimitou uma área enorme, em forma semi-circular com frente para o mar, onde se elevou Cartago. Realmente, é um arco de circunferência que permite obter maior área para dado comprimento do arco.

O problema de Kakeya consiste em achar uma região plana de área mínima com a "propriedade de Kakeya": um segmento unitário pode ser deslocado continuamente na região de modo que no final do movimento tenha sofrido uma rotação de  $180^0$  sobrepondo-se à posição inicial mas em sentido oposto. Besicovitch provou que não existe tal região de área mínima. Como as regiões consideradas por Besicovitch eram perfuradas, modificou-se o problema, procurando-se ou um conjunto convexo ou um simplesmente conexo com a propriedade de Kakeya. Julius Pál provou que o menor conjunto convexo é o triângulo equilátero de altura 1. Pensar-se-ia que o menor conjunto conexo é o limitado pela deltóide (hipociclóide tricúspide) de área  $\pi/8$ . Porém curva limitando região de área consideravelmente menor foi descoberta, independentemente, por Melvin Bloom e I.J.Schoenberg em 1963. É uma curva estrelada que foi descrita por Schoenberg como se assemelhando ao lugar da extremidade de um pêndulo de Foucault oscilando 10.000 vezes. Sua área é menor que  $\pi/11$ . Definindo a constante K de Kakeya como o ínfimo das áreas das regiões simplesmente conexas tendo a propriedade de Kakeya, subsiste o problema de achar K. Até hoje só se sabe que

$$K \leq \frac{5 - 2\sqrt{2}}{24} \pi .$$

Um problema interessante não só por sua importância

intrínseca como por suas aplicações práticas na teoria das comunicações, é o do empacotamento de  $n$ -esferas iguais no espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Seja  $M_n$  o número máximo de  $n$ -esferas de mesmo raio tangentes a uma  $n$ -esfera dada igual às anteriores, mas que não se interceptam embora possam ser tangentes. Sabe-se que  $M_2 = 6$ ,  $M_1 = 2$ . Para  $n = 3$  se tem as esferas habituais do espaço tridimensional. Em 1694, sir Isaac Newton comunicou a David Gregory que  $M_3 = 12$ , mas Gregory afirmou que  $M_3 = 13$ . R. Hoppe provou, 180 anos depois, que o valor de Newton era o correto. Embora só haja uma maneira de circundar um círculo com seis outros iguais, existem várias maneiras de circundar uma esfera com 12 esferas iguais. Acredita-se que  $M_4 = 24$ , mas talvez seja 25 ou 26. Cota superior de  $M_n$  pode ser obtida de trabalho de Schläfli, do qual se conclui que  $M_n$  não supera o máximo inteiro contido em  $\frac{2f_{n-1}(n)}{f_n(n)}$ , onde  $f_n(x)$  é definido por recorrência:

$$f_0(x) = f_1(x) = 1, \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{n-1}^x \frac{f_{n-2}(x-2)}{x \sqrt{x^2-1}} dx$$

Utilizando computadores, John Leech obteve  $M_4 \leq 26$ ,  $M_5 \leq 48$ ,  $M_6 \leq 85$ ,  $M_7 \leq 146$ , etc. O caso mais notável é para  $n = 8$ , onde se achou a seguinte estreita delimitação

$$240 \leq M_8 \leq 244$$

A impossibilidade de resolução por meio de radicais das equações algébricas gerais de grau maior que 4 conduziu Galois à criação da teoria dos grupos, cuja importância, nas aplicações, dificilmente pode ser exagerada: in-

vadiu todos os ramos da Física, e seu uso na Geometria é de tal importância que levou Félix Klein a conceber uma Geometria como o estudo das propriedades invariantes em dado grupo de transformações. Embora esta conceituação da Geometria seja atualmente muito restritiva, ela foi e continua sendo de importância enorme na evolução desta parte da Matemática.

Os elementos de um grupo podem, eventualmente, ser gerados por um número finito de elementos, sujeitos a um número finito de relações. Juxtapondo-os e interpretando a juxtaposição como multiplicação no grupo, resultam as "palavras" (por exemplo, com os elementos  $a, b$  se podem formar as "palavras"  $a, b, ab, ba, aba$ , etc.). Dado um grupo  $G$  gerado por um número finito de elementos sujeitos a um número finito de relações, o problema de decidir se uma dada "palavra" nos elementos geradores é a identidade do grupo é conhecido como o "problema das palavras". O problema das palavras é impossível no sentido de ser recursivamente insolúvel, como o mostrou Novikov em 1955, resultando, daí, que uma coleção de outros problemas, aparentemente significativos, são também insolúveis. Um de tais problemas é o de Burnside, que assim se formula: se  $G$  for um grupo gerado por um número finito de elementos com a propriedade de existir um inteiro positivo  $n$  tal que  $x^n = 1$  para todo  $x$  do grupo, então é  $G$  necessariamente finito? Os grupos são finitos para  $n = 2, 3, 4$  ou  $6$ , mas Novikov anunciou, em 1959, que os grupos são infinitos para  $n = 72$ . Parece que Novikov ainda não publicou sua demonstração, podendo acontecer que contenha alguma falha que a invalide.

A Teoria dos Números é fértil em problemas sugestivos difíceis e não resolvidos, de enunciados enganosamente simples. Fermat afirmou que a equação de Diofante  $x^n + y^n = z^n$  é impossível de ser resolvida para  $x, y, z, n$  inteiros positivos e  $n > 2$ . Foram as tentativas infrutíferas de Kummer para provar esta afirmação que o levaram a criar a teoria dos ideais e à descoberta do teorema da unicidade da decomposição dos números de um corpo ciclotômico em fatores primos ideais. Este teorema, após a extensão que dele fizeram Dedekind e Kronecker aos corpos algébricos quaisquer, tornou-se o ponto central da moderna teoria dos números. Apesar do prêmio de 100.000 marcos deixado pelo matemático Paul Wolfskehl, de Darmstadt, até hoje não foi completamente resolvido, embora tenha sido demonstrado para grande número de valores de  $n$ . O próprio Kummer proveu ser ele verdadeiro para todo expoente  $n$  que seja um número primo regular, conceito relacionado com os números de Bernoulli. E o prof. Mordell observou que existem muitas maneiras mais fáceis de ficar rico do que provando o último teorema de Fermat.

Em 1742, Goldbach aventou a hipótese de que qualquer inteiro par maior que 2, é soma de 2 números primos, até agora não demonstrada ou contradita.

Euler provara que qualquer inteiro positivo é soma de não mais do que 4 quadrados. Em 1770, Waring formulou sua conjectura: qualquer inteiro positivo é soma de, no máximo, 9 cubos, 16 quartas potências. A primeira parte foi provada somente no presente século XX, e a outra ainda está em aberto. Também ainda não se encontrou números perfeitos ímpares (isto é, igual à soma de seus divisores



próprios. Por exemplo:  $6 = 1 + 2 + 3$  é perfeito).

Durante muito tempo se procurou uma fórmula que fornecesse o número de números primos  $\leq x$ . Uma primeira aproximação empírica satisfatória foi dada por Legendre em

1808. Outra, semelhante, foi dada por Gauss :  $\int_2^x \frac{du}{\ln u}$ .

Se  $\Pi(x)$  for o número de números primos  $< x$ , o chamado teorema dos números primos estabelece que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Pi(x)}{x/\ln x} = 1$ ,

resultado demonstrado pela primeira vez em 1896 por Hadamard e de la Vallée Poussin, embora tal já fosse conhecido de Gauss que o anotou na última página de sua tábua de logaritmos. Melhor aproximação é dada pelo chamado logaritmo integral de  $x$  :  $li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x}$ , que difere da de

Gauss apenas por  $li 2 = 1,04$ . Porém surgiu um problema: se é sempre  $\Pi(x) > li(x)$ , ou se a partir de um certo  $x$  se tem, também,  $\Pi(x) > li(x)$ . Embora a primeira tenha sido verificada até  $x = 10^9$ , ela se inverte para  $x$  próximo

de  $10^{10^{34}} = e^{e^{7,705}}$ , número este dito de Skewes. Em 1966, S. Lehman melhorou consideravelmente este resultado, mostrando que entre  $1,53 \cdot 10^{1165}$  e  $1,65 \cdot 10^{1165}$  existem mais do que  $10^{500}$  inteiros  $n$  para os quais  $\Pi(x) > li(n)$ . O número de Skewes foi considerado por G.H. Hardy como sendo o maior número que serviu a uma finalidade bem definida em Matemática.

A conjectura de Polya de que depois do número 2 exis

tem tantos números com número par de fatores como com número ímpar, embora verificada até 800.000, é falsa para números próximos de  $1,845 \times 10^{361}$ , este obtido experimentalmente e com computadores.

A mais célebre coleção de problemas não resolvidos na época de sua formulação é devida a David Hilbert, que a apresentou em Paris em 1900, no 2º Congresso Internacional de Matemáticos. Hilbert sempre quisera fazer a defesa da Matemática pelo seu próprio valor, mas teve outra idéia: sempre refletira sobre a importância de problemas particulares sobre o desenvolvimento da Matemática. Seus estudos o levaram a uma lista contendo 23 problemas, o 1º dos quais é a "Hipótese do Contínuo", de Cantor, que levou Zermelo a introduzir o "axioma da escolha". Este axioma suscitou acirradas discussões, havendo matemáticos que se recusavam a admiti-lo. Em 1940, Kurt Gödel provou ser a Hipótese do Contínuo compatível com os postulados da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (inclusive o da escolha), desde que estes sejam compatíveis entre si; e os trabalhos de Paul J. Cohen publicados em 1963 e 1964 demonstraram ser a Hipótese do Contínuo independente dos postulados da Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (entre os quais se inclui o axioma da escolha). O 3º é sobre medida de áreas, volumes e equidecomponibilidade de figuras, sobre o qual Boltianskii publicou, recentemente, um livro. Aliás, foi sobre este 3º problema que se obteve o primeiro resultado importante devido a um aluno de Hilbert, Max Dehn, que mostrou (como havia sido conjecturado por Hilbert) que um tetraedro regular não pode ser seccionado em partes que, juxtapostas, formariam um cubo. O

6º refere-se a axiomatização da Física. O 7º, à transcendência ou, pelo menos, irracionalidade de certos números. Os primeiros números a serem provados transcendentos foram os números  $e$  (por Hermite) e  $\pi$  (por Lindemann). Em 1934, Aleksander Osipovich Gelfond provou que se  $m$  for número algébrico diferente de zero e 1,  $n$  algébrico não racional,  $m^n$  é transcendente, confirmando a suposição de Hilbert. Mas surgiram novas questões: se para  $m$  e  $n$  transcendentos,  $m^n$  é transcendente? (por exemplo,  $e^e$ ,  $e^\pi$ , etc). O 8º é provar a conjectura de Riemann, de que os zeros da função  $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$  têm parte real  $1/2$ , desde que não seja inteiro negativo, ainda não foi resolvido. O cálculo dos 25.000 primeiros zeros por computadores, confirmam, por enquanto, a hipótese.

A importância dos problemas apresentados por Hilbert é tamanha que, quando se pediu a Hermann Weyl resumir a história da Matemática na primeira metade do século XX, este disse que tal poderia ser feito simplesmente examinando os problemas de Hilbert que foram total ou parcialmente resolvidos. E a ele se deve o rejuvenescimento da escola matemática francesa através das obras do grupo Bourbaki, cujo pai é, indubitavelmente, David Hilbert.

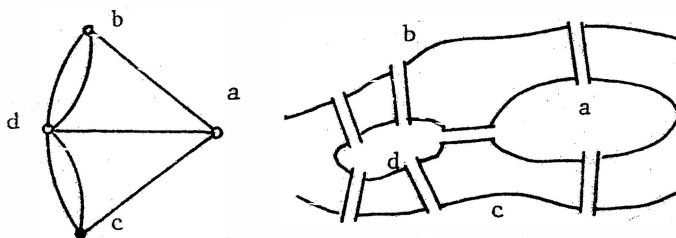
Problema notável é o das quatro cores cuja primeira menção se deve a Moebius (1840) e tornado mais conhecido por Cayley. Consiste em provar que 4 cores bastam para pintar qualquer mapa, de tal modo que duas regiões adjacentes ao longo de uma curva limítrofe, tenham cores diferentes. Tal problema originou enorme série de estudos. Minkowski pensou ser ele de fácil demonstração, e tentou resolvê-lo em suas lições. Mas após algumas semanas de

preleções ainda não conseguira prová-lo e, humildemente confessou isto. A primeira tentativa publicada de demonstração é de A.B.Kempe, em 1879, na qual foram descobertas falhas por P.J.Heawood (1890). O argumento de Kempe, porém, provou que 5 cores seriam suficientes. A partir de 1890 foram feitas várias tentativas de resolução do problema, e a seu respeito, G.D.Birkhoff formulou as seguintes alternativas: 1. A conjectura das 4 cores é falsa; 2. Pode ser possível achar uma coleção de configurações redutíveis tal que qualquer mapa contenha uma delas, e a conjectura estaria provada. 3. A conjectura das 4 cores pode ser verdadeira, mas exige métodos mais complicados para ser provada.

Os métodos para provar redutibilidade foram descritos por Birkhoff em 1910 e, com mais detalhes, por Heesch em 1969 e, mais recentemente, por outros para uso em computadores eletrônicos. E.F.Moore opinava pela falsidade da conjectura. Seu estudo moderno é feito através da Teoria dos Grafos. W.Haken, estudava em Kiel quando Heesch fez sua palestra a respeito da redutibilidade. Interessado, entrou em contacto com Heesch para saber das dificuldades técnicas de uma conjectura deste e da possibilidade de se usar computadores eletrônicos. Em 1970, Heesch lhe comunicou um resultado não publicado, posteriormente citado como finitização do problema das 4 cores, que, aplicado ao caso geral, fornecia 8900 configurações. Haken foi convidado por Heesch para trabalhar em seu projeto de um processo de eliminação para o caso geral; mas tal colaboração foi interrompida em 1971 por se pensar que Shimamoto tivesse resolvido o problema das 4 cores. Em 1972, K.

Appel sugeriu continuar o projeto pois achava exequível o necessário trabalho com computador, e em colaboração com Haken, aperfeiçoou seu processo dito de descarga, conseguindo reduzir o exame do problema a 1834 configurações, posteriormente diminuídas para 1482. Em julho de 1976, apresentaram a redação final de seu trabalho, com 130 páginas, que parece ter finalmente resolvido o problema das 4 cores pela afirmativa, que assim passaria de conjectura para teorema, se as dúvidas surgidas recentemente sobre a validade da demonstração se revelarem infundadas.

Outro problema é o das pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg é atravessada pelo rio Pregel. Duas de suas ilhas são ligadas entre si e as margens por 7 pontes



e os habitantes de Königsberg se indagavam da possibilidade de atravessar as 7 pontes de uma única vez, até que Euler provou sua impossibilidade em 1736. Atualmente tal problema é resolvido como um exemplo na Teoria dos Grafos e também na Topologia.

A primeira referência escrita aos quadrados latinos concerne ao problema de dispor as 16 figuras das cartas de um baralho (que tenha 4 figuras de cada naipe) em 4 linhas e 4 colunas, formando um quadrado de modo que nenhuma linha, coluna ou diagonal contenha mais do que uma carta de cada naipe e de cada valor. Uma lista de suas so

luções foi publicada em 1723. Problema semelhante concernente à disposição de 36 oficiais de 6 diferentes postos e 6 diferentes regimentos foi proposto por Euler em 1779, e provado impossível em 1900 por Tarry. O conceito de quadrado latino foi desenvolvido por Euler, que o considerava como uma tabela ou matriz com  $n^2$  entradas de  $n$  elementos distintos, nenhum deles repetido em qualquer linha ou coluna da matriz. O inteiro  $n$  é dito a ordem do quadrado latino. Cayley mostrou que a tabela de multiplicação de um grupo é um quadrado latino especial, bordejado, dito "Tabela de Cayley". O matemático escocês Mac Mahon elaborou a teoria dos quadrados latinos por gosto do paradoxo e desafio à utilidade, julgando-a inútil e estéril para todo o sempre. Por volta de 1930, os quadrados latinos ressurgiram como tabelas de multiplicação dos quase-grupos e dos "loops" (quase grupo com elemento neutro) (Um quase grupo é um sistema algébrico  $(G,*)$ , em que para quaisquer  $a, b$  de  $G$ , sempre existem  $x, y$  em  $G$ , tais que  $a * x = b$  e  $y * a = b$ ). Em 1935, Ruth Moufang mostrou a íntima relação entre planos projetivos não desarguesianos e quase grupos. Só recentemente os quadrados latinos voltaram a atrair a atenção dos matemáticos por sua importância no estudo das estruturas algébricas e na análise combinatória (em particular, no estudo das geometrias finitas) e por aplicações práticas na estatística, experimentos agrícolas, códigos de detecção e correções de erros, etc. O estudo dos quadrados latinos ortogonais está relacionado com o tema dos planos projetivos finitos e projetos estatísticos de experimentação. Dois quadrados latinos  $L_1 = \| a_{ij} \|$ ,  $L_2 = \| b_{ij} \|$  em  $n$  símbolos (que se po-

dem supor  $1, 2, \dots, n$ ) são ditos ortogonais se todo par ordenado de tais símbolos ocorrer exatamente uma vez entre os  $n^2$  pares  $(a_{ij}, b_{ij})$ . O menor valor de  $n$  para o qual existem quadrados latinos ortogonais é 3; por exemplo

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

são quadrados latinos ortogonais. Demonstra-se que para qualquer  $n \geq 3$  ímpar ou múltiplo de 4, existem pares de quadrados latinos ortogonais. Motivado pelo seu insucesso de resolver o problema dos 36 oficiais, L.Euler conjecturou (em 1782) não existirem quadrados latinos para  $n = 2(2k+1)$ . Em 1900, G.Tarry provou não existir par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6 por enumeração sistemática dos casos possíveis de quadrados latinos. L.J.Paige e C.B.Tomkins tentaram achar um contra-exemplo à conjectura de Euler construindo um par de quadrados latinos de ordem 10 partindo de um quadrado latino prefixado gerado ao acaso e usando o computador SWAC para procurar diretamente um quadrado latino a ele ortogonal. Calcularam necessitar  $4,8 \times 10^{11}$  horas de trabalho maquinal para cada quadrado inicial. Apesar de terem usado mais de 100 horas de tempo de computação, não conseguiram achar um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 10. Mas em 1959, R.C.Bose e S.S.Shrikhande conseguiram finalmente provar a falsidade da conjectura de Euler construindo um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 22, quase ao mesmo tempo que E.T.Parker derivava construções por meio das quais, entre outras coisas, estava apto a obter um par de quadrados latinos de ordem 10, pondo fim a uma dúvida que

atormentara os matemáticos por quase 200 anos. A obtenção de quadrados latinos ortogonais de ordem 22 foi saudada como um novo triunfo da dedução matemática sobre a pesquisa por computador.

A existência de quadrados latinos ortogonais de ordem 10 sugeriu outro problema que permanece em aberto: existência de triplas de quadrados latinos de ordem 10 ortogonais 2 a 2. Em 90 minutos de trabalho executado por um computador ICT Atlas, não se conseguiram completar os arranjos necessários para dar prosseguimento à resolução do problema, e tal tempo representa apenas a milionésima parte do necessário para completar a pesquisa.

Julgo ter justificado a importância de problemas de aparência trivial ou recreativa para o desenvolvimento da Matemática. Também ficou ressaltada a importância crescente, mas nem sempre decisiva dos computadores no exame da veracidade ou falsidade de hipóteses que podem ser decididas pelo exame exaustivo de todos os casos possíveis: a dedução matemática continua sendo o método mais poderoso para comprovar ou desmentir conjecturas. Mas para evidenciar ainda mais a importância de problemas particulares, deixo mencionado que Weierstrass considerava como benévola disposição da Providência ter encontrado, no início de sua carreira, um problema fundamental com o qual se desenvolver, o problema da inversão de Jacobi sobre funções elípticas.

Tal como a dedução deve ser suplementada pela intuição, também o impulso para a progressiva generalização deve ser temperado pelo respeito e amor aos detalhes multicores, que dão vida e graça à Matemática. O problema indi



vidual não deve ser degradado à categoria de ilustração especial de sublimes teorias gerais. Na realidade, teorias gerais emergem da consideração do específico, e não têm sentido se não servirem para esclarecer e ordenar os casos particulares. A este respeito cabe lembrar as seguintes palavras de Jean Dieudonné: "Não existe "matemática moderna" em oposição à "Matemática clássica", mas simplesmente uma única Matemática de hoje, que continua a de ontem sem descontinuidade apreciável e que, acima de tudo, tenta resolver os grandes problemas que nos foram legados pelos nossos predecessores. Se, para tal realizar, os matemáticos foram levados a desenvolver novas idéias abstratas em número apreciável, é que estas idéias tornam frequentemente possível, por assim dizer, concentrar luz no âmago do problema e, eliminando detalhes incômodos, progredir com passos gigantescos em áreas consideradas inaccessíveis há apenas 50 anos. Matemáticos que abstraem só pelo amor da abstração são, usualmente, medíocres".

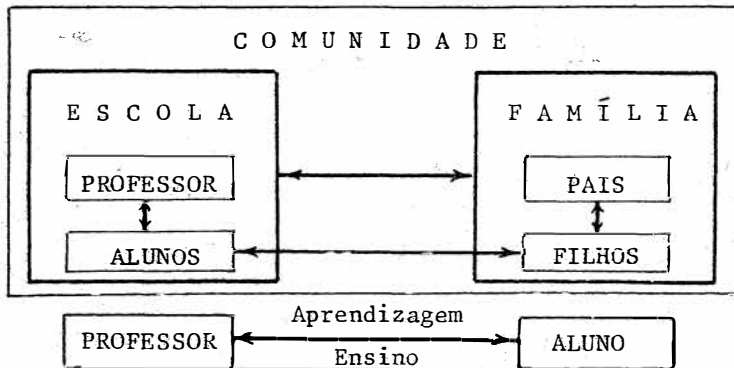
Enquanto trabalha o poder criador da razão, o mundo externo faz sentir sua influência, fornecendo novos fatos, abrindo novas regiões, achando a solução de velhos problemas e formulando novos. Os problemas são, para a Matemática, o que a observação é para as ciências experimentais: sua fonte de inspiração e motivação, sua razão de ser, evitando que ela descambe para um estéril jogo de palavras, uma pretenciosa e pomposa formulação do vazio, o nada em linguagem esotérica.

Universidade Federal do Paraná

## UM MÉTODO DE ENSINO DA MATEMÁTICA

Durval Machado Tavares

De início, é oportuno situar a posição do professor em uma comunidade. Assim:



Professor é aquele que professa. Professar é acreditar naquilo que se pensa e naquilo que se faz.

O professor *ajuda* o aluno a *aprender*, a *pensar*, *fazer*, *criar*.

O aluno aceita a ajuda se confia no professor. Conquistar essa confiança do aluno é primordial no trabalho do professor. A conquista dessa confiança depende fundamentalmente de:

*Conteúdo* amplo e abrangente (conhecimento daquilo que se propõe a ajudar o aluno aprender).

*Forma*, criatividade motivadora (método de ensino).

*Equilíbrio* que inspira segurança (maturidade no proceder).

É inegável que esses três fatores interajam formando um todo que caracteriza a *personalidade* do professor. Da harmonia e coerência dessas três partes teremos um todo estável, firme, cativante e admirado, ou seja, um *professor bem qualificado*.

A interação entre conteúdo e forma se estabelece a partir do momento que definido e dominado amplamente o conteúdo, o professor *cria* uma maneira, um método que caracterizará o processo de ensino-aprendizagem, tendo sempre como "pano de fundo" o equilíbrio e a naturalidade.

CONTEÚDO. O conteúdo deve estar isento de idéias inertes. Deve ser constantemente reavaliado pelas perguntas: a) O que ensinar? b) Por que ensinar tal tópico? c) Qual o valor desse conteúdo dentro de um contexto? d) Qual a sua utilidade? e) Qual o papel que representa dentro de um todo?

FORMA. Estabelecido o conteúdo, a etapa seguinte é a definição da *forma*, do *método*. É estabelecer respostas convincentes e coerentes para as perguntas: a) Como ensinar? b) Qual o modo mais simples para o aluno aprender? c) Qual a maneira de despertar no aluno o interesse em aprender determinado tópico?

A metodologia adotada como forma de se ensinar um determinado conteúdo é, como sabemos, em última instância, determinada por esse conteúdo. No entanto, a ausência de uma metodologia como forma de ensino compromete o aprendizado como um todo e deixa de ser balizante para o conteúdo programado.

O MÉTODO MATEMÁTICO. De um modo geral, dentro da Matemática ocorrem duas situações: a) Elaboração de um con-

ceito, e b) Resolução de um problema.

O fecho de qualquer dessas situações deve ser uma reflexão, onde se analisa, compara-se, avalia-se o que foi feito. Pergunta-se se o trabalho feito: a) Faz sentido? b) Induz a situações novas? c) É um caso particular? d) É uma generalização?

Acreditamos que o caminho mais simples e, portanto, mais seguro no estudo de uma situação é do concreto para o abstrato, do particular para o geral.

Partir de experiências simples, espontâneas, naturais, manipulando elementos familiares de uma maneira conhecida, e, a partir daí, *criar, fazer nascer* algo novo, quer seja um conceito, quer seja a resolução de um problema. Tudo isso, em um clima de desafio, passo a passo, nunca perdendo de vista que a coparticipação do aluno é crucial. Afinal, ele é a razão de todo o processo. Manter sob controle o limite de ajuda ao aluno, pois: a falta de ajuda desorientará o aluno, fazendo-o perder o interesse; enquanto que o excesso de ajuda resultará em uma dependência nociva e bloqueadora da capacidade criativa do aluno.

ELABORAÇÃO DE UM CONCEITO. Na situação de elaboração de um conceito, induzir o aluno de uma maneira natural, quase despercebida, para que junto com o professor, um pouquinho na frente, se possível, pressinta o fato novo. É o "sentir" nascer um novo conceito. A partir daí, pedir e aceitar sugestões para a definição do conceito. Destacar onde está a imprecisão de algumas definições sugeridas, que por certo surgirão. É o momento propício para o aluno perceber o que é *ambigüidade* e o que é *definir*. Em seguida, formalizar a definição, obter novos exemplos, a-

nalizar elementos se se enquadram ou não como exemplos do conceito definido. Conseguir dos próprios alunos novos exemplos e contra-exemplos.

Finalmente, situar o conceito em relação aos conceitos já conhecidos, se ele suscita novas situações, refletir se de alguma forma o conhecimento adquirido enriqueceu o aluno, se acrescentou alguma coisa...

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA. Na situação de resolução de um problema, enunciá-lo de maneira clara e objetiva, para que o aluno o *compreenda* e tenha *interesse* em resolvê-lo. Do confronto entre o que o problema quer e o que é conhecido é que nasce o plano de resolução.

Estabelecido o plano, sua execução torna-se natural e espontânea. Obtido o resultado, fazer uma análise da solução. Se é possível estabelecer outro plano. Se o caminho usado é, de fato, o mais simples. Indagar sobre o significado do resultado. O que ele representa. Se o problema é um caso particular ou uma generalização dentro do contexto. Finalmente, se ele acrescenta algo. Se de fato, "valeu a pena" resolver o problema. Se a resolução "abre horizontes" para novas técnicas e situações...

ADVERTÊNCIA. É importante frisar que por mais idealista que um professor possa ser, por mais ideal que possa ser um determinado método no processo de "ensino-aprendizagem", sempre haverá uma distância, sempre haverá uma diferença entre o ideal e o real.

Conviver com essa diferença, procurando sempre diminuí-la, é, sem dúvida, o que de mais importante existe para a sustentação do equilíbrio, do crescimento da maturidade e da *realização profissional do professor*.

## SEÇÃO DE PROBLEMAS

*Nesta seção serão apresentados problemas a nível de 2º grau, os quais poderão servir como sugestão para a Olimpíada Estadual.*

1. Pede-se calcular o produto das diferenças entre um quadrado perfeito,  $n^2$ , e os quadrados perfeitos  $m^2$ , tais que  $1 < m^2 < n^2$ . (Proposto pelo aluno Alexandre Machado Kleis, da UFPR)
2. Construir, com régua e compasso, um triângulo ABC, conhecendo o lado a, a altura relativa ao mesmo lado,  $h_a$ , sabendo-se ainda que a razão dos ângulos adjacentes ao lado dado é 1:2. (Proposto pelo Prof. A. Mochoy Costa, da UFPR)
3. Admitindo condições adequadas de divisibilidade, reduza o máximo possível a expressão seguinte:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$$

4. Se o raio  $r$  de um círculo é aumentado em 100%, qual o percentual do aumento da área?
5. Em um tetraedro (não necessariamente regular), duas arestas opostas têm o mesmo comprimento  $m$  e são perpendiculares entre si. Além disso, cada uma delas é perpendicular ao segmento de reta de comprimento  $n$  que une seus pontos médios. Expressar o volume do tetraedro em função de  $m$  e  $n$ .

6. Quando dividimos  $f(x) = x^{13} + 1$  por  $x - 1$ , qual o resto encontrado?

7. Construa um ângulo de  $15^\circ$  com régua e compasso. Explique a construção e justifique. (Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo - 1979)

8. Sejam  $p$  e  $q$  números inteiros estritamente positivos, tais que

$$p/q = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots - 1/1318 + 1/1319.$$

Mostre que 1979 divide  $p$ . (XXI Olimpíada Internacional de Matemática - Londres - 1979)

9. Um triângulo  $ABC$  tem base  $AB$  fixa sobre a reta  $r$ , e o vértice  $C$  desloca-se ao longo de uma reta  $s$ , paralela a  $r$  e à distância  $h$  de  $r$ . Determine a curva descrita pelo ponto de encontro das três alturas do triângulo  $ABC$ , quando  $C$  percorre  $s$ . (I Olimpíada Brasileira de Matemática - 1979)

10. Seja  $ABC$  triângulo isósceles, com ângulo em  $A$  igual a  $20^\circ$  e ângulos em  $B$  e  $C$  iguais a  $80^\circ$ . Do ponto  $B$  conduzimos uma reta formando  $50^\circ$  com  $BC$  e que corta  $CA$  em  $E$  e do ponto  $C$  conduzimos uma reta que forma  $60^\circ$  com  $BC$  e corta  $BA$  em  $D$ . As retas  $BE$  e  $CD$  cortam-se em  $G$ . Prove-se o ângulo  $D$  do triângulo  $DGE$ .

11. Se 5 meios geométricos são inseridos entre 8 e 5832, ache o quinto termo da progressão geométrica.

\* \* \* \*

Os leitores são convidados a enviar soluções para:  
Prof. Antonio Mochon Costa, Caixa Postal 1261, Curitiba  
(80.000) PR. No próximo número publicaremos uma seleção das melhores soluções recebidas.

## NOT I C I Á R I O

1. Em agosto de 1979 nosso consócio Aurélio Sartorelli, a tual Tesoureiro da SPM, foi aprovado em concurso para professor titular do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.
2. Em setembro de 1979 o professor Jayme Machado Cardoso, titular do Departamento de Matemática da UFPR, foi aprovado em concurso para professor titular do Departamento de Desenho da mesma Universidade.
3. No fim do ano passado regressou do Canadá o professor Carlos Alberto Picanço de Carvalho, do Departamento de Informática da UFPR, após ter obtido seu doutorado em Ciência da Computação na Universidade de Waterloo.
4. De 5 a 7 de novembro de 1979 foi realizada na UFPR a I Reunião Regional da Sociedade Brasileira de Matemática em Curitiba. Além de mesa redonda sobre "Matemática - Ensino e Pesquisa", foram proferidas as seguintes conferências: 1) Influência dos problemas sobre a Matemática (Leo Barsotti, UFPR), 2) Um problema de cálculo, sua história e algumas questões em aberto (Augusto José Mauricio Wanderley, UFRJ), 3) Atuação da SBM no ensino da Matemática de 1º e 2º graus (Elza F. Gomide, USP), 4) Aplicações da Matemática à Biologia (Cyro de Carvalho Patarra, USP), 5) Equações diferenciais funcionais (Walter de Bona Castelan, UFSC), 6) Curvas geodésicas (Antonio Carlos Asperti, USP), 7) Método Matemático (Durval Machado Tavares, UFPR).



5. Foi realizado em Curitiba de 4 a 9 de maio de 1980, o 1º Encontro Nacional de Matemática dos Centros Federais de Educação Tecnológica e Escolas Técnicas Federais.
6. Em desastre aéreo ocorrido no dia 11 de abril de 1980, na cidade de Florianópolis, faleceu o Prof. Walter de Bona Castelan, do Departamento de Matemática da UFSC.
7. Em abril de 1980 foi nomeado para diretor do Setor de Ciências Exatas da UFPR nosso consócio Sérgio Ricardo Schneider, que substitui o professor Orlando Silveira Pereira, também sócio da SPM.
8. Em abril de 1980 foi nomeada para dirigir o Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, a professora Ayda Ignez Arruda, sócia de nossa Sociedade, de cuja Diretoria foi Presidente. A professora Arruda substitui o professor Ubiratan D'Ambrosio, sócio da SPM.
9. Será realizada pelo Departamento de Matemática e pelo Núcleo de Estudos de Matemática da Universidade Católica do Paraná, de 26 a 31 de maio de 1980, a Semana da Matemática. Na programação constam várias conferências.
10. A Sociedade Brasileira de Matemática realizará em setembro de 1980 a II Olimpíada Brasileira de Matemática para alunos do 2º grau. No Paraná a prova será realizada em Curitiba.
11. A SPM realizará no dia 5 de julho de 1980 a I Olimpíada Estadual de Matemática, para alunos do 2º grau. Aos três melhores alunos serão concedidos prêmios ofertados pela Secretaria de Educação, Banco do Estado do Pa

ranã e FUNDEPAR.

12. Participação, também, da I Olimpíada Estadual de Matemática, alunos da cidade de Imperatriz, MA, "Campus" Avançado da UFPR. A Prefeitura local fornecerá ao primeiro colocado naquela cidade, como prêmio, uma passagem aérea Imperatriz-Curitiba-Imperatriz.
13. Será realizada na segunda quinzena de julho de 1980, em Recife, PE, a VI Escola de Álgebra. Informações com o professor Israel Vaisencher do Departamento de Matemática da UFPE.
14. Será realizada em Mar del Plata (Argentina), de 28/7 a 8/8 de 1980, a V Escola Latinoamericana de Matemática. Informações com o Dr. Miguel Herrera do Instituto Argentino de Matemática (Viamonte 1636, Buenos Aires 1055 - República Argentina).
15. O Boletim da SPM será publicado duas vezes por ano.

PUBLICAÇÕES A VENDA NA SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO A TEORIA DAS FUNÇÕES

*por Richard Courant*

(Tradução de Leo Barsotti)

\* \* \*

TEORIA DOS CONJUNTOS E ESPAÇOS MÉTRICOS

*por E.H. Spanier*

(Tradução de Newton C.A. da Costa)

\* \* \*

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

*por Jean P. Lafon*

\* \* \*

FUNDAMENTALS OF BANACH ALGEBRAS

*por Kenneth Hoffman*

\* \* \*

Preço de cada exemplar: Cr.\$ 100,00