INFLUÊNCIA DOS PROBLEMAS SOBRE A MATEMÁTICA

Leo Barsotti

Não vou discorrer sobre a utilidade da resolução de problemas propostos em livros-textos como parte essencial do aprendizado da Matemática, o que é sobejamente conhecida, mas sobre a importância de uma outra categoria de problemas usualmente não apresentados em tais livros, por ainda não ser conhecida sua solução, porém fundamentais para o desenvolvimento da Matemática.

Cada época tem seus problemas científicos que a época seguinte resolve ou deixa de lado como estéreis, substituindo-os por outros. A grande influência de certos problemas bem determinados no progresso geral da ciência matemática é não menos incontestável do que a influência de tais problemas sobre o trabalho particular do pesquisador, e a vitalidade de qualquer ramo da Matemática é proporcional à abundância de seus problemas. Sem problemas não há pesquisa matemática. A força do pesquisador se aplica a sua resolução e acaba por descobrir novos métodos ou novos pontos de vista que lhe permitem descortinar novos horizontes. É difícil, às vezes impossível, prejulgar o valor de um problema; é apenas o proveito que as ciências tiram de sua resolução ou que a Matemática tira de sua não resolução, motivadora da criação de novos métodos, que permitem avaliar a importância de dado problema.

Para ser atraente, um problema matemático deve ser difícil, mas não inabordável, freqüentemente de aparência simples; deve ser um verdadeiro guia que dirija o pesquisador através dos labirintos de idéias dispersivas e enganosas, levando-o a descobrir verdades ocultas e recompensando seus esforços com a alegria que lhe proporciona a descoberta da solução. Os matemáticos de todas as épocas se ocuparam com ardor da solução de problemas difíceis. Lembro, entre outros, a descoberta dos números irracionais feita pelos pitagóricos e guardada como terrível segredo, punível com a morte dos que o divulgassem. São célebres os problemas geométricos da trissecção do ângulo, da duplicação do cubo e da quadratura do círculo, o primeiro solúvel somente para certos casos particulares, e o segundo, equivalente a construção com régua e compasso da $\sqrt[3]{2}$, provada impossível no século passado. Também notável é o da divisão da circunferência em partes iguais, com régua e compasso, que foi resolvida por Gauss ao provar que só se pode efetuá-la para partes iguais cujo número n seja da forma $n = 2^h p_i \ldots p_k$, os p_i sendo números primos da forma 2^p+1.

Outros problemas conduziram à criação de novos ramos da Matemática. Por exemplo, durante muito tempo procurou-se demonstrar o postulado das paralelas de Euclides, pois parecia que ele devia ser um teorema, logicamente dedutível dos outros. Tentativa célebre neste sentido deve-se a Saccheri, que, por pouco, deixou de descobrir as geometrias não euclidianas. Partindo da negação de tal postulado de Euclides, mediante deduções lógicas procurou chegar a uma contradição que comprovaria a necessidade do postulado das paralelas. Jamais a encontrou, mas, mesmo assim, estava convicto que ele era a única hipótese viável. O primeiro matemático a admitir a possibilidade de outras hipóteses diferentes da de Euclídes, foi Gauss, que infelizmente, com receio dos beócios, não divulgou seus resultados. Daí a glória da descoberta das Geometrias não euclidianas ser atribuida a Bolyai e a Lobatchevski, para a hipótese de existir mais de uma paralela, e a Riemann, na suposição de não existirem paralelas.

São bem conhecidos os problemas que levaram Newton e Leibniz à criação do Cálculo Diferencial e Integral; o problema das velocidades e o problema das tangentes a uma curva. Relacionado com o Cálculo Infinitesimal tem-se outro problema célebre, o da braquistócrona, que nasceu da rivalidade entre os irmãos James e Jean Bernoulli. Em 1696, Jean Bernoulli, o mais moço, propôs o problema da braquistócrona e publicamente desafiou os matemáticos do mundo a resolvê-lo. Consiste em achar a trajetória a ser seguida por uma partícula pesada que cai de um ponto A para outro B, não na mesma vertical mas em nível inferior a A,de modo que o tempo para ir de A para B seja mínimo. Embora a solução dada pelo proponente seja mais elegante que a de seu irmão James, o método deste era mais geral e deu início a longa série de pesquisas que levou à criação do Cálculo das Variações, como hoje é conhecida a parte da Matemática que trata de tal tipo de problemas de máximos e mínimos. O cálculo das variações também resolve outro célebre problema, o dos isoperímetros ou de Dido, cuja origem é lendária. Conta-se que Dido foi acolhida por um soberano do norte da África, e tendo caído nas boas graças deste, conseguiu que se lhe desse tanta terra quanta pudesse delimitar com um couro de boi. Cortando tal couro em tiras extremamente finas, com ela delimitou uma área enorme, em forma semi-circular com frente para o mar, onde se elevou Cartago. Realmente, é um arco de circunferência que permite obter maior área para dado comprimento do arco.

O problema de Kakeya consiste em achar uma região plana de área mínima com a "propriedade de Kakeya": um segmento unitário pode ser deslocado continuamente na região de modo que no final do movimento tenha sofrido uma rotação de 180^o sobrepondo-se à posição inicial mas em sentido oposto. Besicovitch provou que não existe tal região de área mínima. Como as regiões consideradas por Besicovitch eram perfuradas, modificou-se o problema, procurando-se ou um conjunto convexo ou um simplesmente conexo com a propriedade de Kakeya. Julius Pál provou que o menor conjunto convexo é o triângulo equilátero de altura 1. Pensar-se-ia que o menor conjunto conexo é o limitado pela deltóide (hipociclóide tricúspide) de área $\Pi/8$. Porém curva limitando região de área consideravelmente menor foi descoberta, independentemente, por Melvin Bloom e I.J.Schoenberg em 1963. É uma curva estrelada que foi descrita por Schoenberg como se assemelhando ao lugar da extremidade de um pêndulo de Foucault oscilando 10.000 vezes. Sua área é menor que $\Pi/11$. Definindo a constante K de Kakeya como o ínfimo das áreas das regiões simplesmente conexas tendo a propriedade de Kakeya, subsiste o problema de achar K. Até hoje só se sabe que

$$K \leq \frac{5 - 2\sqrt{2}}{24} \Pi \quad .$$

Um problema interessante não só por sua importância intrínseca como por suas aplicações práticas na teoria das comunicações, é o do empacotamento de n-esferas iguais no espaço euclidiano n-dimensional. Seja M_n o número máximo de n-esferas de mesmo raio tangentes a uma n-esfera dada igual às anteriores, mas que não se interceptam embora possam ser tangentes. Sabe-se que $M_2 = 6$, $M_1 = 2$. Para n = 3 se tem as esferas habituais do espaço tridimensional. Em 1694, sir Isaac Newton comunicou a David Gregory que $M_3 = 12$, mas Gregory afirmou que $M_3 = 13$. R. Hoppe provou, 180 anos depois, que o valor de Newton era o correto. Embora só haja uma maneira de circundar um círculo com seis outros iguais, existem várias maneiras de circundar uma esfera com 12 esferas iguais. Acredita-se que $M_4 = 24$, mas talvez seja 25 ou 26. Cota superior de M_n pode ser obtida de trabalho de Schläfli, do qual se conclui que M_n não supera o máximo inteiro contido em $\dfrac{2f_{n-1}(n)}{f_n(n)}$, onde $f_n(x)$ é definido por recorrência:

$$f_o(x) = f_1(x) = 1, \quad f_n(x) = \frac{1}{\Pi}\int_{n-1}^{x} \frac{f_{n-2}(x-2)}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

Utilizando computadores, John Leech obteve $M_4 \leqslant 26$, $M_5 \leqslant 48$, $M_6 \leqslant 85$, $M_7 \leqslant 146$, etc. O caso mais notável é para n = 8, onde se achou a seguinte estreita delimitação

$$240 \leqslant M_8 \leqslant 244$$

A impossibilidade de resolução por meio de radicais das equações algébricas gerais de grau maior que 4 conduziu Galois à criação da teoria dos grupos, cuja importância, nas aplicações, dificilmente pode ser exagerada: invadiu todos os ramos da Física, e seu uso na Geometria é de tal importância que levou Félix Klein a conceber uma Geometria como o estudo das propriedades invariantes em dado grupo de transformações. Embora esta conceituação da Geometria seja atualmente muito restritiva, ela foi e continua sendo de importância enorme na evolução desta parte da Matemática.

Os elementos de um grupo podem, eventualmente, ser gerados por um número finito de elementos, sujeitos a um número finito de relações. Juxtapondo-os e interpretando a juxtaposição como multiplicação no grupo, resultam as "palavras" (por exemplo, com os elementos a,b se podem formar as "palavras" a, b, ab, ba, aba, etc.). Dado um grupo G gerado por um número finito de elementos sujeitos a um número finito de relações, o problema de decidir se uma dada "palavra" nos elementos geradores é a identidade do grupo é conhecido como o "problema das palavras". O problema das palavras é impossível no sentido de ser recursivamente insolúvel,como o mostrou Novikov em 1955, resultando, daí, que uma coleção de outros problemas, aparentemente significativos, são também insolúveis. Um de tais problemas é o de Burnside, que assim se formula: se G for um grupo gerado por um número finito de elementos com a propriedade de existir um inteiro positivo n tal que $x^n = 1$ para todo x do grupo, então é G necessariamente finito? Os grupos são finitos para n = 2, 3, 4 ou 6, mas Novikov anunciou, em 1959, que os grupos são infinitos para n 72. Parece que Novikov ainda não publicou sua demonstração, podendo acontecer que contenha alguma falha que a invalide.

A Teoria dos Números é fértil em problemas sugestivos difíceis e não resolvidos, de enunciados enganosamente simples. Fermat afirmou que a equação de Diofante $x^n + y^n = z^n$ é impossível de ser resolvida para x,y,z,n inteiros positivos e $n > 2$. Foram as tentativas infrutíferas de Kummer para provar esta afirmação que o levaram a criar a teoria dos ideais e à descoberta do teorema da unicidade da decomposição dos números de um corpo ciclotômico em fatores primos ideais. Este teorema, após a extensão que dele fizeram Dedekind e Kronecker aos corpos algébricos quaisquer, tornou-se o ponto central da moderna teoria dos números. Apesar do prêmio de 100.000 marcos deixado pelo matemático Paul Wolfskehl, de Darmstadt, até hoje não foi completamente resolvido, embora tenha sido demonstrado para grande número de valores de n. O próprio Kummer proveu ser ele verdadeiro para todo expoente n que seja um número primo regular, conceito relacionado com os números de Bernoulli. E o prof. Mordell observou que existem muitas maneiras mais fáceis de ficar rico do que provando o último teorema de Fermat.

Em 1742, Goldbach aventou a hipótese de que qualquer inteiro par maior que 2, é soma de 2 números primos, até agora não demonstrada ou contradita.

Euler provara que qualquer inteiro positivo é soma de não mais do que 4 quadrados. Em 1770, Waring formulou sua conjectura: qualquer inteiro positivo é soma de, no máximo, 9 cubos, 16 quartas potências. A primeira parte foi provada somente no presente século XX, e a outra ainda está em aberto. Também ainda não se encontrou números perfeitos ímpares (isto é, igual à soma de seus divisores próprios. Por exemplo: $6 = 1 + 2 + 3$ é perfeito).

Durante muito tempo se procurou uma fórmula que fornecesse o número de números primos $\leq x$. Uma primeira aproximação empírica satisfatória foi dada por Legendre em 1808. Outra, semelhante, foi dada por Gauss : $\int_2^x \frac{du}{\ln u}$.
Se $\Pi(x)$ for o número de números primos $< x$, o chamado teorema dos números primos estabelece que $\lim_{x \to \infty} \frac{\Pi(x)}{x/\ln x} = 1$, resultado demonstrado pela primeira vez em 1896 por Hadamard e de la Vallée Poussin, embora tal já fosse conhecido de Gauss que o anotou na última página de sua táboa de logaritmos. Melhor aproximação é dada pelo chamado logaritmo integral de x : $\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x}$, que difere da de Gauss apenas por $\mathrm{li}\ 2 = 1{,}04$. Porém surgiu um problema: se é sempre $\Pi(x) > \mathrm{li}\ (x)$, ou se a partir de um certo x se tem, também, $\Pi(x) > \mathrm{li}\ (x)$. Embora a primeira tenha sido verificada até $x = 10^9$, ela se inverte para x próximo de $10^{10^{10^{34}}} = e^{e^{e^{7,705}}}$, número este dito de Skewes. Em 1966, S.Lehman melhorou consideravelmente este resultado, mostrando que entre $1{,}53.10^{1165}$ e $1{,}65.10^{1165}$ existem mais do que 10^{500} inteiros n para os quais $\Pi(x) > \mathrm{li}\ (n)$. O número de Skewes foi considerado por G.H.Hardy como sendo o maior número que serviu a uma finalidade bem definida em Matemática.

A conjectura de Polya de que depois do número 2 exis tem tantos números com número par de fatores como com número ímpar, embora verificada até 800.000, é falsa para números próximos de 1,845 x 10^{361}, este obtido experimentalmente e com computadores.

A mais célebre coleção de problemas não resolvidos na época de sua formulação é devida a David Hilbert, que a apresentou em Paris em 1900, no 2º Congresso Internacional de Matemáticos. Hilbert sempre quisera fazer a defesa da Matemática pelo seu próprio valor, mas teve outra idéia: sempre refletira sobre a importância de problemas particulares sobre o desenvolvimento da Matemática. Seus estudos o levaram a uma lista contendo 23 problemas, o 1º dos quais é a "Hipótese do Contínuo", de Cantor, que levou Zermelo a introduzir o "axioma da escolha". Este axioma suscitou acirradas discussões, havendo matemáticos que se recusavam a admití-lo. Em 1940, Kurt Gödel provou ser a Hipótese do Contínuo compatível com os postulados da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (inclusive o da escolha), desde que estes sejam compatíveis entre si; e os trabalhos de Paul J. Cohen publicados em 1963 e 1964 demonstraram ser a Hipótese do Contínuo independente dos postulados da Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (entre os quais se inclui o axioma da escolha). O 3º é sobre medida de áreas, volumes e equidecomponibilidade de figuras, sobre o qual Boltianskii publicou, recentemente, um livro. Aliás, foi sobre este 3º problema que se obteve o primeiro resultado importante devido a um aluno de Hilbert, Max Dehn, que mostrou (como havia sido conjecturado por Hilbert) que um tetraedro regular não pode ser seccionado em partes que, juxtapostas, formariam um cubo. O

6º refere-se a axiomatização da Física. O 7º, à transcendência ou, pelo menos, irracionalidade de certos números. Os primeiros números a serem provados transcendentes foram os números e (por Hermite) e Π (por Lindemann). Em 1934, Aleksander Osipovich Gelfond provou que se m for número algébrico diferente de zero e 1, n algébrico não racional, m^n é transcendente, confirmando a suposição de Hilbert. Mas surgiram novas questões: se para m e n transcendentes, m^n é transcendente? (por exemplo, e^e,e^Π, etc). O 8º é provar a conjectura de Riemann, de que os zeros da função $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$ têm parte real 1/2, desde que não seja inteiro negativo, ainda não foi resolvido. O cálculo dos 25.000 primeiros zeros por computadores, confirmam, por enquanto, a hipótese.

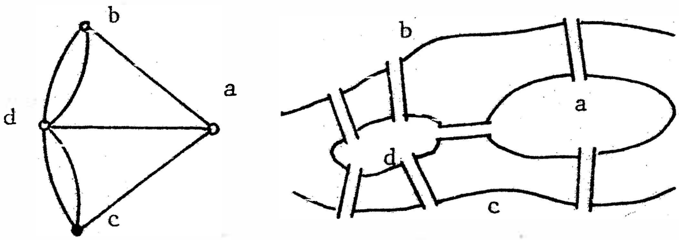
A importância dos problemas apresentados por Hilbert é tamanha que, quando se pediu a Hermann Weyl resumir a história da Matemática na primeira metade do século XX, este disse que tal poderia ser feito simplesmente examinando os problemas de Hilbert que foram total ou parcialmente resolvidos. E a ele se deve o rejuvenescimento da escola matemática francesa através das obras do grupo Bourbaki, cujo pai é, indubitavelmente, David Hilbert.

Problema notável é o das quatro cores cuja primeira menção se deve a Moebius (1840) e tornado mais conhecido por Cayley. Consiste em provar que 4 cores bastam para pintar qualquer mapa, de tal modo que duas regiões adjacentes ao longo de uma curva limítrofe, tenham cores diferentes. Tal problema originou enorme série de estudos. Minkowski pensou ser ele de fácil demonstração, e tentou resolvê-lo em suas lições. Mas após algumas semanas de preleções ainda não conseguira prová-lo e, humildemente confessou isto. A primeira tentativa publicada de demonstração é de A.B.Kempe, em 1879, na qual foram descobertas falhas por P.J.Heawood (1890). O argumento de Kempe, porém, provou que 5 cores seriam suficientes. A partir de 1890 foram feitas várias tentativas de resolução do problema, e a seu respeito, G.D.Birkhoff formulou as seguintes alternativas: 1. A conjectura das 4 cores é falsa; 2. Pode ser possível achar uma coleção de configurações redutíveis tal que qualquer mapa contenha uma delas, e a conjectura estaria provada. 3. A conjectura das 4 cores pode ser verdadeira, mas exige métodos mais complicados para ser provada.

Os métodos para provar redutibilidade foram descritos por Birkhoff em 1910 e, com mais detalhes, por Heesch em 1969 e, mais recentemente, por outros para uso em computadores eletrônicos. E.F.Moore opinava pela falsidade da conjectura. Seu estudo moderno é feito através da Teoria dos Grafos. W.Haken, estudava em Kiel quando Heesch fez sua palestra a respeito da redutibilidade. Interessado, entrou em contacto com Heesch para saber das dificuldades técnicas de uma conjectura deste e da possibilidade de se usar computadores eletrônicos. Em 1970, Heesch lhe comunicou um resultado não publicado, posteriormente citado como finitização do problema das 4 cores, que, aplicado ao caso geral, fornecia 8900 configurações. Haken foi convidado por Heesch para trabalhar em seu projeto de um processo de eliminação para o caso geral; mas tal colaboração foi interrompida em 1971 por se pensar que Shimamoto tivesse resolvido o problema das 4 cores. Em 1972, K.

Appel sugeriu continuar o projeto pois achava exeqüível o necessário trabalho com computador, e em colaboração com Haken, aperfeiçoou seu processo dito de descarga, conseguindo reduzir o exame do problema a 1834 configurações, posteriormente diminuidas para 1482. Em julho de 1976, apresentaram a redação final de seu trabalho, com 130 páginas, que parece ter finalmente resolvido o problema das 4 cores pela afirmativa, que assim passaria de conjectura para teorema, se as dúvidas surgidas recentemente sobre a validade da demonstração se revelarem infundadas.

Outro problema é o das pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg é atravessada pelo rio Pregel. Duas de suas ilhas são ligadas entre si e as margens por 7 pontes



e os habitantes de Königsberg se indagavam da possibilidade de atravessar as 7 pontes de uma única vez, até que Euler provou sua impossibilidade em 1736. Atualmente tal problema é resolvido como um exemplo na Teoria dos Grafos e também na Topologia.

A primeira referência escrita aos quadrados latinos concerne ao problema de dispor as 16 figuras das cartas de um baralho (que tenha 4 figuras de cada naipe) em 4 linhas e 4 colunas, formando um quadrado de modo que nenhuma linha, coluna ou diagonal contenha mais do que uma carta de cada naipe e de cada valor. Uma lista de suas soluções foi publicada em 1723. Problema semelhante concernente à disposição de 36 oficiais de 6 diferentes postos e 6 diferentes regimentos foi proposto por Euler em 1779, e provado impossível em 1900 por Tarry. O conceito de quadrado latino foi desenvolvido por Euler, que o considerava como uma tabela ou matriz com n^2 entradas de n elementos distintos, nenhum deles repetido em qualquer linha ou coluna da matriz. O inteiro n é dito a ordem do quadrado latino. Cayley mostrou que a tabela de multiplicação de um grupo é um quadrado latino especial, bordejado, dito "Tabela de Cayley". O matemático escocês Mac Mahon elaborou a teoria dos quadrados latinos por gosto do paradoxo e desafio à utilidade, julgando-a inútil e estéril para todo o sempre. Por volta de 1930, os quadrados latinos ressurgiram como tabelas de multiplicação dos quase-grupos e dos "loops" (quase grupo com elemento neutro) (Um quase grupo é um sistema algébrico (C,*), em que para quaisquer a,b de G, sempre existem x,y em G, tais que $a * x = b$ e $y * a = b$). Em 1935, Ruth Moufang mostrou a íntima relação entre planos projetivos não desarguesianos e quase grupos. Só recentemente os quadrados latinos voltaram a atrair a atenção dos matemáticos por sua importância no estudo das estruturas algébricas e na análise combinatória (em particular, no estudo das geometrias finitas) e por aplicações práticas na estatística, experimentos agrários, códigos de detecção e correções de erros, etc. O estudo dos quadrados latinos ortogonais está relacionado com o tema dos planos projetivos finitos e projetos estatísticos de experimentação. Dois quadrados latinos $L_1 = \| a_{ij} \|$, $L_2 = \| b_{ij} \|$ em n símbolos (que se podem supor 1,2,...,n) são ditos ortogonais se todo par ordenado de tais símbolos ocorrer exatamente uma vez entre os n^2 pares (a_{ij},b_{ij}). O menor valor de n para o qual existem quadrados latinos ortogonais é 3; por exemplo

$$L_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad L_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

são quadrados latinos ortogonais. Demonstra-se que para qualquer $n \geq 3$ ímpar ou múltiplo de 4, existem pares de quadrados latinos ortogonais. Motivado pelo seu insucesso de resolver o problema dos 36 oficiais, L.Euler conjecturou (em 1782) não existirem quadrados latinos para $n = 2(2k+1)$. Em 1900, G.Tarry provou não existir par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6 por enumeração sistemática dos casos possíveis de quadrados latinos. L.J.Paige e C.B.Tomkins tentaram achar um contra-exemplo à conjectura de Euler construindo um par de quadrados latinos de ordem 10 partindo de um quadrado latino prefixado gerado ao acaso e usando o computador SWAC para procurar diretamente um quadrado latino a ele ortogonal. Calcularam necessitar $4{,}8 \times 10^{11}$ horas de trabalho maquinal para cada quadrado inicial. Apesar de terem usado mais de 100 horas de tempo de computação, não conseguiram achar um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 10. Mas em 1959, R. C.Bose e S.S.Shrikhande conseguiram finalmente provar a falsidade da conjectura de Euler construindo um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 22, quase ao mesmo tempo que E.T.Parker derivava construções por meio das quais, entre outras coisas, estava apto a obter um par de quadrados latinos de ordem 10, pondo fim a uma dúvida que atormentara os matemáticos por quase 200 anos. A obtenção de quadrados latinos ortogonais de ordem 22 foi saudada como um novo triunfo da dedução matemática sobre a pesquisa por computador.

A existência de quadrados latinos ortogonais de ordem 10 sugeriu outro problema que permanece em aberto: existência de triplas de quadrados latinos de ordem 10 ortogonais 2 a 2. Em 90 minutos de trabalho executado por um computador ICT Atlas, não se conseguiram completar os arranjos necessários para dar prosseguimento à resolução do problema, e tal tempo representa apenas a milionésima parte do necessário para completar a pesquisa.

Julgo ter justificado a importância de problemas de aparência trivial ou recreativa para o desenvolvimento da Matemática. Também ficou ressaltada a importância crescente, mas nem sempre decisiva dos computadores no exame da veracidade ou falsidade de hipóteses que podem ser decididas pelo exame exaustivo de todos os casos possíveis: a dedução matemática continua sendo o método mais poderoso para comprovar ou desmentir conjecturas. Mas para evidenciar ainda mais a importância de problemas particulares, deixo mencionado que Weierstrass considerava como benévola disposição da Providência ter encontrado, no início de sua carreira, um problema fundamental com o qual se desenvolver, o problema da inversão de Jacobi sobre funções elípticas.

Tal como a dedução deve ser suplementada pela intuição, também o impulso para a progressiva generalização deve ser temperado pelo respeito e amor aos detalhes multicores, que dão vida e graça à Matemática. O problema indi vidual não deve ser degradado à categoria de ilustração especial de sublimes teorias gerais. Na realidade, teorias gerais emergem da consideração do específico, e não têm sentido se não servirem para esclarecer e ordenar os casos particulares. A este respeito cabe lembrar as seguintes palavras de Jean Dieudonné: "Não existe "matemática moderna" em oposição à "Matemática clássica", mas simplesmente uma única Matemática de hoje, que continua a de ontem sem descontinuidade apreciável e que, acima de tudo, tenta resolver os grandes problemas que nos foram legados pelos nossos predecessores. Se, para tal realizar, os matemáticos foram levados a desenvolver novas idéias abstratas em número apreciável, é que estas idéias tornam frequentemente possível, por assim dizer, concentrar luz no âmago do problema e, eliminando detalhes incômodos, progredir com passos gigantescos em áreas consideradas inacessíveis há apenas 50 anos. Matemáticos que abstraem só pelo amor da abstração são, usualmente, medíocres".

Enquanto trabalha o poder criador da razão, o mundo externo faz sentir sua influência, fornecendo novos fatos, abrindo novas regiões, achando a solução de velhos problemas e formulando novos. Os problemas são, para a Matemática, o que a observação é para as ciências experimentais: sua fonte de inspiração e motivação, sua razão de ser, evitando que ela descambe para um estéril jogo de palavras, uma pretenciosa e pomposa formulação do vazio, o nada em linguagem esotérica.

Universidade Federal do Paraná