COMBINAÇÃO COM ELEMENTOS DUPLOS

Alexandre Machado Kleis

1. Introdução.

Em vários jogos de cartas utilizam-se dois baralhos. Surge a questão: quantas "mãos" (grupos distintos de cartas) com p cartas (o que varia de jogo para jogo) podem ser formadas a partir das $2m$ cartas (se cada baralho tiver m delas)?

Assim, o problema de calcular o número de combinações de $2m$ objetos (apenas m dos quais distintos), em grupos de p objetos, reduz-se a calcular o número N de combinações que podem ser formadas com m objetos, em grupos de p, admitindo-se que cada um dos m objetos possa aparecer no máximo duas vezes.

2. Cálculos.

2.1. *p é par.* Dado um conjunto finito S de m elementos, consideremos a combinação

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_r a_r,$$

na qual cada elemento aparece duas vezes, sendo $0 < r \leq m$ e $a_1, a_2, \dots, a_r$ elementos de S. O número total destas combinações é, obviamente, $\binom{m}{r}$.

Seja, agora, N_s o número total das combinações de p elementos da forma

$$(1) \qquad a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_s a_s b_1 b_2 \dots b_{p-2s},$$

onde $0 \leq s \leq p/2$ e $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_{p-2s}$ são elementos de S. Tais combinações retratam todas as possíveis dos m elementos de S em grupos de p, segundo a regra explicitada na introdução, e se observando:

a) se s = 0, as combinações (1) assumem a forma

$$b_1 b_2 \ldots b_p \ ;$$

b) se s = p/2, as combinações (1) assumem a forma

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_{p/2} a_{p/2} \ .$$

Ora, é fácil ver que

$$N_s = \binom{m}{s}\binom{m-s}{p-2s} \ .$$

Então, o número N de combinações mencionado na introdução é

$$N = \sum_{s=0}^{p/2} N_s = \sum_{s=0}^{p/2} \binom{m}{s}\binom{m-s}{p-2s} \ .$$

2.2. *p é ímpar*. Considerações análogas às anteriores mostram que, para o caso em que p é ímpar,

$$N = \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{m}{s}\binom{m-s}{p-2s} \ .$$

2.3. *Generalização*. Introduzindo a notação $[x]$ para o maior inteiro contido em x, temos

$$N = \sum_{s=0}^{[p/2]} \binom{m}{s}\binom{m-s}{p-2s} \ .$$

Às vezes é conveniente pôr $CD_{m,p}$ ao invés de N.

3. Exemplo.

Dado o conjunto $S = \{a,b,c,d,e\}$ $(m = 5)$, calculemos o número de combinações de seus elementos em grupos de quatro $(p = 4)$, admitindo-se para tal, que cada um deles possa aparecer no máximo duas vezes.

Solução:

$$CD_{5,4} = \sum_{s=0}^{2} \binom{5}{s}\binom{5-s}{4-2s} = \binom{5}{0}\binom{5}{4} + \binom{5}{1}\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{0} = 45,$$

Tais combinações são:

abcd	aabc	aade	bbac	bbde	ccad	ccdd	ddbc	eeac
abce	aabd	aabb	bbad	bbcc	ccae	ccee	ddbe	eead
abde	aabe	aacc	bbae	bbdd	ccbd	ddab	ddce	eebc
acde	aacd	aadd	bbcd	bbee	ccbe	ddac	ddee	eebd
bcde	aace	aaee	bbce	ccab	ccde	ddae	eeab	eecd.

4. Observação.

Em [1], p.183 e seguintes, Madsen Barbosa mostra um outro método que pode ser aplicado ao caso estudado. Basta calcular o coeficiente de t^p em $(1 + t + t^2)^m$, o que requer mais cálculos numéricos.

REFERÊNCIA

1. Barbosa, R.M. - *Combinatória e grafos*, v.1, Liv.Nobel, São Paulo, 1974.

Universidade Federal do Paraná