O PROCESSO DE PASSAR AO LIMITE

Josef K. H. Dortmann

O processo de passar ao limite, ou a convergência, pode ser descrito em termos muito gerais. Na realidade, é perfeitamente possível construir uma teoria de limites usando somente o conceito de vizinhança de um ponto. Uma vez definida a convergência, conceitos como conjunto aberto, fecho, fronteira, etc., podem ser introduzidos e definidos em termos de convergência. A seguir, se por exemplo o espaço é um espaço vetorial como R^n, a sua estrutura algébrica pode ser usada para definir soma e produto de limites. O processo é bastante geral e, por isso, mostra a natureza do conceito de convergência que, na reta R e em R^n, é oculta pela abundância de resultados e detalhes.

Nosso objetivo é mostrar que a idéia de convergência é única, ou seja, que noções como a continuidade de uma função em um ponto, de limites de funções e limites de sequências são casos particulares de um só conceito. Para alcançar este objetivo, não há necessidade de seguir o processo acima descrito. A vizinhança de um ponto pode ser definida em termos de conjuntos abertos. Desta maneira, vamos desde já supor que está definida a estrutura topológica do espaço que, em nosso caso, é o espaço R^n. O trabalho agora é mais simples e se restringe à descrição de um fenômeno conhecido em espaço conhecido, mas em termos talvez novos.

O problema da descrição de espaços mais gerais que o F^n (espaços topológicos) em termos de convergência foi resolvido por E.H.Moore e H.L.Smith em 1922. Um pouco mais tarde, H.Cartan desenvolveu uma teoria que se mostrou equivalente à de Moore e Smith. Além de resolver o problema acima citado, eles unificaram e generalizaram as teorias de limites existentes na época.

NOTAÇÕES

Usamos a notação habitual da teoria dos conjuntos. Os símbolos R, R^n e N indicam, respectivamente, o conjunto dos números reais, das n-uplas de números reais e dos números naturais.

Uma família de elementos em X com índices em um conjunto L é uma função $A : L \dashrightarrow X$. Em vez de $A(\alpha)$ escrevemos A_α. A família será indicada por $\{A_\alpha : \alpha \in L\}$. Geralmente o contradomínio da função A é um subconjunto do conjunto das partes de um certo conjunto dado. Se X é um conjunto, $\mathcal{P}(X)$ representa o conjunto das partes de X. Se, por exemplo, a função $V: N \dashrightarrow \mathcal{P}(N)$ é definida por $V(p) = V_p = \{n \in N : p \geqslant n\}$, então $V_{10} = \{11,12,13,\ldots\}$. Representaremos a família $\{V_p : p \in N\}$ por $\mathcal{V}_N$. Um outro exemplo é dado pela função $B : N \dashrightarrow \mathcal{P}(R)$, definida por $B_n = (b-1/n, b+1/n)$ com $b \in R$. Representaremos B_n por $B(b,1/n)$. A família $\mathcal{B}_b = \{B_n : n \in N\}$ é a família dos intervalos abertos de centro em b e raio 1/n. Analogamente, em R^n a família $\mathcal{B}_b$ representa a família das bolas abertas de centro em b e raio $1/n$, com $n \in N$. Uma outra família de interesse é a família $\mathcal{B}_{b,\delta} = \{B_\delta : \delta \in R^+\}$ com $B_\delta = (b-\delta, b+\delta)$ e onde R^+ é o conjunto dos números reais positivos. Em R^n a mesma família representa a coleção das bolas abertas de centro em b e raio δ.

Um conjunto A é aberto quando para cada um de seus pontos b existe $B_\delta \subset A$. Uma vizinhança V_b de um ponto b é um aberto que contém b. A família das vizinhanças do ponto b será indicada por $\mathcal{V}_b$.

O conjunto $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ é a reta estendida R^o. Se b é elemento de R, os intervalos $(-\infty, b)$ e $(b, +\infty)$, considerados como subconjuntos de R^o, são vizinhanças de $-\infty$, e $+\infty$, respectivamente. A família das vizinhanças de $+\infty$ será indicada por $\mathcal{V}_\infty$.

Um ponto b é ponto de aderência de X quando $V_b \cap X \neq \emptyset$ para toda vizinhança V_b. O conjunto dos pontos de aderência é o fecho $\overline{X}$ de X. Se $(V_b - \{b\}) \cap X \neq \emptyset$ para todo V_b, então b é um ponto de acumulação de X. O conjunto dos pontos de acumulação de X é o conjunto derivado X' de X. Mostra-se que $\overline{X} = X \cup X'$. Observemos que em R^o, os elementos $-\infty$ e $+\infty$ são pontos de acumulação de $R \subset R^o$, e que o elemento $+\infty = \infty$ é ponto de acumulação de $N \subset R^o$. Um ponto $b \in X$ é ponto isolado de X quando existe uma vizinhança V_b, tal que $V_b \cap X = \{b\}$. Para todo $b \in X$, ou b é ponto de acumulação ou b é ponto isolado de X.

Um conjunto A é aberto em X quando existe aberto $I \subset R^n$ tal que $A = I \cap X$. Os abertos em X podem assumir formas pouco ortodoxas, dependendo do conjunto X. Se, por exemplo, X é o conjunto dos números naturais N e $n \in N$, en tão $\{n\}$ é aberto em R, pois basta escolher $I = (n-1,n+1)$ (que é aberto em R) e temos que $\{n\} = I \cap N$. Desta maneira, os conjuntos V_p da família $\mathcal{V}_N$ são abertos em N. Se X é aberto em R^n, os abertos em X são os subconjuntos de X abertos em R^n.

Se $b \in \overline{X}$, então $\mathcal{V}_b \cap X = \{V_b \cap X : V_b \in \mathcal{V}_b\}$ indica a família das vizinhanças do ponto b no conjunto X, e $\mathcal{V}_b - \{b\}$ representa a família $\{V_b - \{b\}: V_b \in \mathcal{V}_b\}$.

I. DIREÇÕES

Definição I.1. Uma família $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$ de subconjuntos de X é uma direção em X quando:

(1) $A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in L$;

(2) se $\alpha, \beta \in L$, então existe $\gamma \in L$ tal que A_γ está contido em $A_\alpha \cap A_\beta$.

É uma consequência direta da definição I.1 que a interseção de um número finito de elementos de uma direção é conjunto não vazio.

Notemos que o conjunto de índices L pode ser finito. Se, por exemplo, $\mathcal{A} = \{A\}$, então $\mathcal{A}$ é uma direção. A família $\mathcal{B}_1 \cap X$ é uma direção em $X = (0,1)$. Para todo $b \in R$, as famílias $\mathcal{V}_b$ e $\mathcal{B}_b$ são direções em R.

Definição I.2. Uma direção $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$ em X converge para o ponto b se, e somente se, para todo $V_b \in \mathcal{V}_b$, existir $A_\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $A_\alpha \subset V_b \cap X$.

Para indicar que a direção converge para b escrevemos $\mathcal{A} \dashrightarrow b$.

É fácil verificar que em R^o: (i) $\mathcal{V}_N \dashrightarrow \infty$; (ii) as fa mílias $\mathcal{V}_b$ e $\mathcal{B}_b$ convergem para b; (iii) se $b \in \bar{X}$, então as direções $\mathcal{V}_b \cap X$, $\mathcal{B}_b \cap X$, $\mathcal{V}_b - \{b\}$ e $\mathcal{B}_b - \{b\}$ convergem para o ponto b; (iv) a direção $\mathcal{A} = (0,1/n) \cup (2,2+\frac{1}{n})$ não é convergente.

Se $X = (0,1) \cup \{2\}$, então 2 é ponto isolado de X e $\mathcal{B}_{2,\delta} \to 2$, pois dado V_2 basta escolher $B_\delta = B_1$ e resulta $B_1 \cap X = \{2\}$, que é subconjunto de V_2.

Em todos os exemplos verifica-se que o ponto de convergência, quando existe, é único. Isto sempre acontece em R^n e deve-se ao fato de que dois pontos distintos b e c podem ser separados por vizinhanças disjuntas. Em outros termos: se $b,c \in R^n$ e $b \neq c$, então existem V_b e V_c disjuntas.

Proposição I.1. Uma direção $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$ não pode convergir para dois pontos distintos.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A} \to b$ e $\mathcal{A} \to c$, com $b \neq c$. Então existem V_b e V_c com $V_b \cap V_c = \emptyset$. $\mathcal{A} \to b$ implica que existe $A_\alpha \in \mathcal{A}$ com $A_\alpha \subset V_b$; $\mathcal{A} \to c$ implica que existe $A_\beta \in \mathcal{A}$ com $A_\beta \subset V_c$. Mas neste caso $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ e $\mathcal{A}$ não pode ser direção ■

Se $\mathcal{A}$ é direção em X e $f: X \to Y$, então a imagem da família $\mathcal{A}$ pela f é uma direção em f(X). Para demonstrar esta afirmação precisamos de duas propriedades da imagem direta de uma função, a saber:

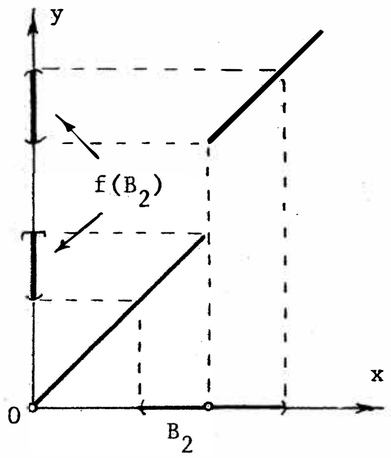
(i) Se $A \subset B$, então $f(A) \subset f(B)$,

(ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Seja, agora, $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$ uma direção em X e $f: X \to Y$. É claro que se $A_\alpha \in \mathcal{A}$, então $A_\alpha \neq \emptyset$ e $f(A_\alpha) \neq \emptyset$. Além disso, $f(A_\alpha)$ é subconjunto de f(X). Para todos α e β de L existe $\gamma \in L$, tal que $A_\gamma \subset A_\alpha \cap A_\beta$. Então, $f(A_\gamma)$ está contido em $f(A_\alpha \cap A_\beta) \subset f(A_\alpha) \cap f(A_\beta)$. Seja $f: [0,2] \to R$ dada por

$f(x) = x$ se $\in [0,1]$

$f(x) = x+1$ se $x \in (1,2]$.



Temos que $\mathcal{B}_1 \longrightarrow 1$. Se $B_n = (1-1/n, 1+1/n)$, então $f(B_n)$ é igual a união $(1-1/n, 1] \cup (2, 2+1/n)$. A direção $f(\mathcal{B}_1)$ não converge em $f(X)$.

Estamos agora em condições de definir a continuidade de uma função em um ponto. A definição é importante, pois engloba também a passagem ao limite nas suas diversas formas.

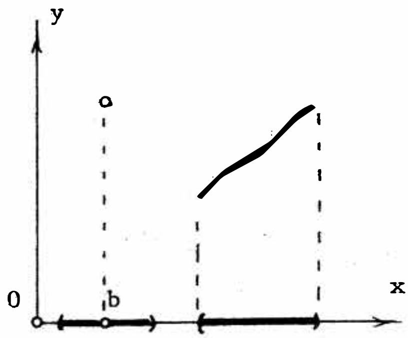
Definição I.3. $f: X \to Y$ é contínua em $b \in X$, se, e somente se, $f(\mathcal{V}_b \cap X) \to f(b)$. A função será contínua em X quando for contínua em todos os pontos de X.

Seguindo um costume bastante difundido, escreveremos $f(\mathcal{V}_b)$ em vez de $f(\mathcal{V}_b \cap X)$. Subentende-se, então, que as vizinhanças V_b são vizinhanças em X.

Notemos que $f(\mathcal{V}_b) \to f(b)$ significa que para todo $V_{f(b)}$ existe V_b tal que $f(V_b) \subset V_{f(b)}$, o que é a conhecida definição de continuidade de uma função em $x = b$.

Vejamos alguns exemplos de funções contínuas. Se $f: X \to Y$ é função constante definida por $f(x) = c$, então ela é contínua em X. Pois, para um ponto $b \in X$ temos que $f(\mathcal{V}_b) = \{f(V_b) : V_b \in \mathcal{V}_b\} = \{\{c\}\} \to c = f(b)$. Também é contínua a função identidade $i : X \to X$ com $f(x) = x$, pois $i(\mathcal{V}_b) = \mathcal{V}_b \to b = i(b)$.

Seja $f : X \to Y$ e seja b ponto isolado de X. Então f é contínua em b. Sendo b ponto isolado de X, podemos escolher V_b tal que $V_b \cap X = \{b\}$. Seja agora $\mathcal{A} = \{V_b : V_b \cap X = \{b\}\}$. Evidentemente, $\mathcal{A} \to b$ e $f(\mathcal{A}) = f\{V_b : V_b \cap X = \{b\}\} = f\{\{b\}\} = \{f(b)\} \to f(b)$.



$V_b \cap X = \{b\}$

Isso mostra que, qualquer que seja o valor escolhido para $f(b)$, a função f será contínua em $x = b$.

II. SUBDIREÇÕES

A definição da continuidade de uma função em um ponto é dada em termos da família das vizinhanças do mesmo ponto. Esta família é realmente "grande" e um dos objetivos da introdução do conceito de subdireção é a substituição de $\mathcal{V}_b$ por outras famílias, "menores" e de manuseio mais fácil. Também a noção de subsequência encontra sua expressão mais natural em termos de subdireções.

Definição II.1. Sejam $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in L\}$ e $\mathcal{B} = \{B_\beta : \beta \in M\}$ direções. Dizemos que $\mathcal{B}$ é subdireção de $\mathcal{A}$ quando para todo $A_\alpha \in \mathcal{A}$, existe $B_\beta \in \mathcal{B}$ tal que $B_\beta \subset A_\alpha$. Neste caso escrevemos $\mathcal{A} \vdash\!-\!- \mathcal{B}$.

Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, então $\mathcal{B} \vdash\!-\!- \mathcal{A}$. Pois temos que para todo

$A_\alpha \in \mathcal{A}$, $A_\alpha \in \mathcal{B}$ e sendo $\mathcal{B}$ uma direção, existe B_β em $\mathcal{B}$ tal que $B \subset A$. Da definição das famílias $\mathcal{B}_b$ e $\mathcal{V}_b$ resulta que uma é subdireção da outra, ou seja, $\mathcal{B}_b \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b \vdash\!\!-\!- \mathcal{B}_b$. Com relação a subdireções mostra-se ainda o seguinte:

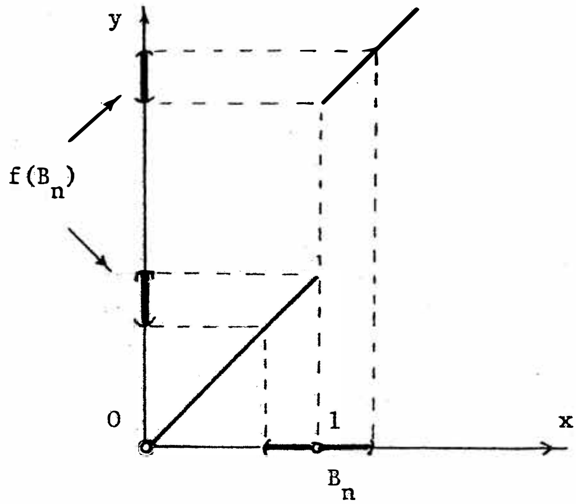
(1) Se $\mathcal{A}_N$ é direção em N, $\mathcal{A}_N \vdash\!\!-\!-$ N e $A_p \vdash\!\!-\!- \mathcal{A}_N$, então A_p é subconjunto infinito de N.

(2) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são direções em X com $\mathcal{B} \vdash\!\!-\!- \mathcal{A}$ e $f : X \dashrightarrow Y$, então também $f(\mathcal{B}) \vdash\!\!-\!- f(\mathcal{A})$.

Proposição II.1. Seja $\mathcal{A}$ direção. $\mathcal{A} \dashrightarrow b$ se, e somente se, $\mathcal{A} \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b$.

Demonstração. Se $\mathcal{A} \dashrightarrow b$, então para todo $V_b \in \mathcal{V}_b$, existe $A_\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $A_\alpha \subset V_b$, e concluimos que $\mathcal{A} \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b$. Reciprocamente, seja $\mathcal{A} \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b$. Para todo $V_b \in \mathcal{V}_b$ existe $A_\alpha \subset V_b$. Pela definição da convergência resulta $\mathcal{A} \dashrightarrow b$ ∎

No que diz respeito a continuidade, podemos agora substituir a família $\mathcal{V}_b$ pela família $\mathcal{B}_b$. Pois de $\mathcal{B}_b \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b \vdash\!\!-\!- \mathcal{B}_b$ resulta que $f(\mathcal{B}_b) \vdash\!\!-\!- f(\mathcal{V}_b) \vdash\!\!-\!- f(\mathcal{B}_b)$ e a proposição II.1 permite concluir que $f(\mathcal{B}_b) \dashrightarrow c$ se, e somente se, $f(\mathcal{V}_b) \dashrightarrow c$. Vejamos um exemplo: Uma função $f: X \dashrightarrow Y$ não é contínua em $b \in X$ quando existe $V_{f(b)}$ tal que para todo $B_n \in \mathcal{B}_b$ se verifica que $f(B_n) \not\subset V_{f(b)}$. Consideremos a função $f: X \dashrightarrow Y$ com $X = [0,2]$ e f definida por $f(x) = x$ se $x \in [0,1]$, $f(x) = x + 1$ se $x \in (1,2]$. Sendo $B_n \in \mathcal{B}_1$, o intervalo $(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ é subconjunto de X e temos que $f(B_n) = (1 - \frac{1}{n}, 1] \cup (2, 2 + \frac{1}{n})$, para todo n. Escolhendo agora $V_{f(1)} = (0,2)$, é óbvio que $f(B_n) \not\subset V_{f(1)}$ e a f não pode ser contínua em $x = 1$.



III. LIMITES

Pequenas modificações na definição de continuidade de uma função em um ponto caracterizam o limite da função e também de sequências, como um caso particular da continuidade. Os casos de limites infinitos, no infinito e limites de sequências se enquadram naturalmente.

Os dois problemas que apresentamos a seguir são problemas básicos dos limites de funções.

(1) Seja $f : X \to Y$ e $b \in X'-X$. Existe $F : X \cup \{b\} \to Y$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ e F contínua em $x = b$?

(2) Seja $f : X \to Y$ descontínua em $x = b$. Existe função $F : X \to Y$, tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X - \{b\}$ e F contínua em $x = b$?

Se a resposta à primeira pergunta é afirmativa, então podemos estender a função f continuamente ao ponto b

de $X' - X$. A solução do segundo problema abre a possibilidade de redefinir a função f no ponto $x = b$, de tal modo que a nova função F se torne contínua neste ponto. Em ambos os casos, o valor da função F no ponto b, se existir, será chamado limite da função f no ponto $x = b$.

Examinando o primeiro problema, fica claro que a condição de continuidade da F em $x = b$ exige que $F(\mathcal{V}_b)$ seja convergente. Mas $b \notin X$ e $f(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ permitem identificar $f(\mathcal{V}_b)$ com $F(\mathcal{V}_b)$. Se agora $f(\mathcal{V}_b)$ converge para o ponto c, então basta por $F(b) = c$ e a função F satisfaz as condições do primeiro problema; isto é, $F(x)$ é igual a $f(x)$ para todo $x \in X$ e F é contínua em $x = b$.

No segundo problema, observemos que f descontínua em $x = b$ quer dizer que a direção $f(\mathcal{V}_b)$ não converge para $f(b)$. Mas pode muito bem acontecer que $f(\mathcal{V}_b - \{b\})$ seja convergente. Se $f(\mathcal{V}_b - \{b\}) \longrightarrow c$, então a exigência da continuidade de F em $x = b$ impõe de novo a escolha $F(b) = c$.

No primeiro problema, exigir a convergência de $f(\mathcal{V}_b)$ é equivalente a exigir a convergência de $f(\mathcal{V}_b - \{b\})$, pois $b \notin X$. Nos dois casos, a convergência da direção $f(\mathcal{V}_b - \{b\})$ resolve o problema. Temos, então, a seguinte definição.

Definição III.1. Seja $f : X \longrightarrow Y$ e $b \in X'$. A função f possui limite no ponto $x = b$ se, e só se, $f(\mathcal{V}_b - \{b\})$ é convergente. Se $f(\mathcal{V}_b - \{b\}) \longrightarrow c$, então c é o limite da função f no ponto $x = b$ e escrevemos $\lim_b f(x) = c$.

A unicidade do limite, quando existe, é garantida pela proposição I.1.

Uma função pode não ter extensão contínua no ponto $b \in X'-X$. Seja $X = R^+$ e $f : X \to R$ dada por $f(x) = 1/x$. Então $0 \in X' - X$ e $\mathcal{B}_0 \cap X \to 0$. Mas, para todo $n \in N$ e $B_n \in \mathcal{B}_0$, temos $B_n \cap X = (0,1/n)$, $f(B_n) = (n,\infty) \in \mathcal{V}_N$ e $f(\mathcal{B}_0) \to \infty$. A função f não possui limite em $x = 0$.

No processo de passar ao limite, a condição de que b seja ponto de acumulação de X é essencial. Pois se b não é ponto de acumulação de X, necessariamente é ponto isolado de X e $f(\mathcal{V}_b)$ pode convergir para qualquer ponto.

Não há necessidade de reformular a definição III.1 para o caso de limites no infinito e limites infinitos. Se $f : R^o \to R$, então ∞ é ponto de acumulação de $R \subset R^o$. Neste caso, $\lim_\infty f(x) = b$ significa que para todo V_b, existe V_∞, tal que $f(V_\infty) \subset V_b$. A função $f : R^+ \subset R^o \to R$ dada por $f(x) = 1/x$ é um exemplo. Se $V = (a,\infty)$, então $f(V) = (0,1/a)$ para todo $a \in R$. Resulta que $f(V_\infty) \to 0$ e $\lim_\infty f(x) = 0$. Da mesma maneira, $\lim f(x) = \infty$ quer dizer que $f(\mathcal{V}_b - \{b\}) \to \infty$ ou, para todo $V \in \mathcal{V}_\infty$ existe V_b tal que $f(\mathcal{V}_b - \{b\}) \subset V_\infty$.

O limite de uma sequência também se enquadra na definição III.1. Uma sequência em X é uma função $x : N \to X$, Em vez de $x(n)$ escrevemos x_n. A sequência será indicada por (x_n). Observemos que ∞ é ponto de acumulação de $N \subset \subset R^o$.

Dizer que a sequência (x_n) tem por limite o ponto b (escrevemos $x_n \to b$), significa que para toda vizinhança V_b existe V_∞ tal que $x(V_\infty \cap N) \to b$. Mas $V_\infty \cap N$ é um conjunto do tipo $V_p \in \mathcal{V}_N$ e $x(V_\infty \cap N) \to b$ quer dizer que da do V_b, existe $p \in N$ tal que, se $n \geq p$, então $x_n \in V_b$.

Se $\mathcal{A}_N$ é subdireção de $\mathcal{V}_N$, então o conjunto $D = \cup A_p$, com $A_p \in \mathcal{A}_N$ é subconjunto infinito de N e possui ∞ como ponto de acumulação. Seja, agora $x : N \to X$ uma sequência, $\mathcal{A}_N \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_N$ e $D = \cup A_p$, $A_p \in \mathcal{A}_N$. A restrição $x_{|D}$ de D em X define uma subsequência da sequência (x_n). A proposição II.1 permite afirmar que uma sequência converge para um ponto b se, e somente se, qualquer subsequência da sequência dada converge para o mesmo ponto b.

IV. CONVERGÊNCIA E NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Todas as noções topológicas do espaço R^n podem ser expressas em termos de limites de sequências.

Se $x : N \to X$ é uma sequência convergindo para b, então $x(\mathcal{V}_N)$ é direção em X e, pela proposição II.1 resulta que $x(\mathcal{V}_N) \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b$.

Proposição IV.1. Um ponto b é ponto de aderência de X se, e só se, existir sequência (x_n) em X, com $x_n \to b$.

Demonstração. Se $b \in \overline{X}$, então $B_n \cap X \neq \emptyset$ para todo $B_n \in \mathcal{B}_b$. Para todo $n \in N$ e todo $B_n \in \mathcal{B}_b$, escolhemos x_n em B_n. A sequência $x_n \to b$. Reciprocamente, se $x_n \to b$, então $x(\mathcal{V}_N)$ é direção em X e $x(\mathcal{V}_N) \to b$. Pela proposição II.1 temos que $x(\mathcal{V}_N) \vdash\!\!-\!- \mathcal{V}_b$. Logo, para todo $V_b \in \mathcal{V}_b$ existe $x(V_p) \subset V_b$. Temos que $x(V_p) \cap X \subset V_b \cap X$ e $V_b \cap X \neq \emptyset$ ∎

Da mesma maneira mostra-se que b é ponto de acumulação de X quando existe uma sequência (x_n) em $X - \{b\}$, convergindo para o ponto b.

Proposição IV.2. Seja $f : X \dashrightarrow Y$, $b \in X$ e (x_n) sequência em X convergindo para b. A função f é contínua em $b \in X$ se, e somente se, $f(x_n) \dashrightarrow f(b)$.

Demonstração. Seja $f : X \dashrightarrow Y$ contínua no ponto b e $x_n \dashrightarrow b$. Então $x(V_N) \vdash\!\!- - V_b$ e $f(x(V_N)) \vdash\!\!- - f(V_b)$. Como $f(V_b) \dashrightarrow b$, temos que $f(x(V_N))$ converge para f(b) e $f(x_n) \dashrightarrow f(b)$. Para mostrar a recíproca, suponhamos que f não seja contínua em $b \in X$. Isto quer dizer que existe $V_{f(b)}$ tal que para todo $B_n \in \mathcal{B}_b$ se verifica que $f(B_n) \not\subset \not\subset V_{f(b)}$. Para todo $n \in N$ e todo B_n escolhemos $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) \notin V_{f(b)}$. Isto define uma sequência (x_n), $x_n \dashrightarrow b$, mas $f(x_n) \not\dashrightarrow f(b)$ ∎

Não há mais dificuldades em exprimir os conceitos restantes em termos de limites de sequências. Assim, por exemplo, mostra-se sem dificuldades que:

(1) Um ponto b pertence a fronteira de X quando é limite de uma sequência em X e limite de uma sequência em $R^n - X$.

(2) X é denso em R^n quando todo ponto em R^n é limite de sequência em X.

A definição de limite é, evidentemente, um caso particular da continuidade de uma função $f : X \dashrightarrow Y$ em um ponto $b \in X$. Mas, o que determina a continuidade da f é a direção $f(V_b)$ em Y. Se pensarmos na função f como um dispositivo que serve para definir direções em Y, então é óbvio que a continuidade também pode ser considerada um caso particular da convergência de direções.

Nada impede agora devolver às definições o seu aspecto usual e aproveitar as operações para obter todos os resultados da convergência em R_n.

R E F E R Ê N C I A S

1. CARTAN, H. - Théorie des filtres. *Comptes Rendus Paris* 205 (1937).
2. DIEUDONNÉ, J. - *Foundations of modern analysis*. Academic Press, 1960.
3. DUGUNDJI, J. - *Topology*. Allyn and Bacon, 1976.
4. KELLEY, J.L. - *General topology*. D.van Nostrand, 1955.
5. MC SHANE, E.J. - A theory of limits. *Studies in modern analysis*. Math.Assoc.America, 1962.
6. MOORE, E.H & H.L.SMITH - A general theory of limits. *Amer.J.Math*. 44 (1922).

Universidade Federal do Paraná